

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, aprilie 2024

Proba E.c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timp de lucru efectiv este de **trei ore**.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Calculați prima zecimală a numărului $\sqrt{E}$, unde $E = \frac{\log_2 8 + 4^{\log_4 9}}{\log_3 (\log_2 512)}$.
- 5p 2. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea: $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{6})^{100}$
- 5p 3. Să se determine suma rădăcinilor ecuației: $x - \sqrt[3]{x-1} = 1$.
- 5p 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de submultimi ale lui A care conțin cel puțin un număr par.
- 5p 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2; 0)$, $B(1; \sqrt{3})$ și $C(1; -\sqrt{3})$. Arătați că în triunghiul ABC, înălțimea și A și mediana din B se intersectează în $O(0; 0)$.
- 5p 6. Stiind că $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin a + \cos a = 1$, arătați că $\left| \operatorname{tg} \left(a + \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1$

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 5p a) Arătați că $\operatorname{rang}(A^2 - A) = 0$
- 5p b) Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X \cdot A = A \cdot X$.
- 5p c) Arătați că dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2024} = A$, atunci $X = A$ sau $X = -A$.
- 5p 2. Se consideră inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p a) Pentru $n = 6$, calculați suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în $\mathbb{Z}_6$.
- 5p b) Pentru $n = 8$, arătați că dacă $\hat{x} \in \mathbb{Z}_8$ astfel încât $\hat{x}^7 = \hat{1}$, atunci $\hat{x} = \hat{1}$.
- 5p c) Pentru $n = 10$, arătați că ecuația $\hat{x}^9 = \hat{x} + \hat{1}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_{10}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră funcția $f: (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2}$.
- 5p a) Arătați că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -2)$.
- 5p b) Determinați asimptotele graficului funcției f .
- 5p c) Arătați că $f(x) < e^x - 1$, $\forall x \in (-\infty, -2)$.

5p

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1} dx$.

5p

a) Calculați I_0 .

5p

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit.

5p

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	1. $\log_2 8 = 3$; $4^{\log_4 9} = 9$; $\log_3(\log_2 512) = \log_3 9 = 2$	3p
	$E = \frac{3+9}{2} = 6 \Rightarrow$ prima zecimală a numărului $\sqrt{6}$ este 4.	2p
5p	2. $T_{k+1} = C_{100}^k (\sqrt{2})^{100-k} (\sqrt[3]{6})^k = C_{100}^k 2^{\frac{100-k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{3}} = C_{100}^k \cdot 2^{\frac{300-k}{6}} \cdot 3^{\frac{k}{3}}$	3p
	T_{k+1} este rațional, deci k este multiplu de 6, $k \in \{0, 6, 12, \dots, 96\}$. Așadar sunt 17 termeni raționali.	2p
5p	3. $x - \sqrt[3]{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow (x-1)^3 = x-1 \Rightarrow x-1=0$ sau $(x-1)^2 = 1$.	3p
	Obținem soluțiile $x_1=1, x_2=0, x_3=2$, cu suma egală cu 3.	2p
5p	4. Mulțimea A are 5 elemente, așadar are $2^5 = 32$ submulțimi. Eliminând numerele pare, rezultă că mulțimea $\{1, 3, 5\}$ are $2^3 = 8$ submulțimi.	3p
	Mulțimea A are 8 submulțimi care nu conțin numere pare, așadar sunt $32-8=24$ submulțimi care conțin cel puțin un număr par.	2p
5p	5. $x_B = x_C = 1 \Rightarrow BC \perp Ox$. Fie $\{D\} = BC \cap Ox$. Cum $A \in Ox$, rezultă că AD este înălțimea din A, deci $O \in AD$.	2p
	Fie M mijlocul lui AC. $x_M = -\frac{1}{2} y_M = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se arată că $\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_O & y_O & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0$, așadar B, O, M	3p
	sunt coliniare, deci $O \in BM$.	
5p	6. $\sin a + \cos a = 1 \mid \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin a + \sin \frac{\pi}{4} \cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	3p
	$\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)} = \pm 1 \Rightarrow \left \operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\right = 1$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A$	3p
	$A^2 - A = O_2 \Rightarrow \operatorname{rang}(A^2 - A) = \operatorname{rang} O_2 = 0$	2p
5p	b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ a.i. $A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	3p
		2p

	$\Rightarrow c=0, b=2a-2d \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in \mathbb{R}$	
5p	c) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ verifică $X^{2024} = A \Rightarrow X^{2025} = A \cdot X$ și $X^{2025} = X \cdot A \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A, \text{ iar din b) rezultă } X = \begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $\det X = a \cdot d$. Din $X^{2024} = A$ și $\det A = 0 \Rightarrow \det X = 0 \Rightarrow a \cdot d = 0$ Dacă $a=0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -2d \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2d^2 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \dots \Rightarrow X^{2024} = \begin{pmatrix} 0 & -2d^{2024} \\ 0 & d^{2024} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (fals) Așadar $a \neq 0$ și din $a \cdot d = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aA \Rightarrow X^{2024} = a^{2024} A^{2024}$. Din $A^2 = A \Rightarrow A^{2024} = A$ $\Rightarrow X^{2024} = a^{2024} \cdot A$. Dar $X^{2024} = A$. Deducem că $a^{2024} = 1, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow X = A$ sau $X = -A$	2p 3p
5p	2. a) $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$. Se verifică dacă orice element din $\mathbb{Z}_6$ este soluție a ecuației . Suma soluțiilor: $\hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = \hat{3}$.	3p 2p
5p	b) $\hat{x}^7 = \hat{1} \Rightarrow \hat{x}^6 \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot \hat{x}^6 = \hat{1} \Rightarrow \hat{x}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_8$. Mulțimea elementelor inversabile în $\mathbb{Z}_8$ este $\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$ și avem: $\hat{1}^2 = \hat{3}^2 = \hat{5}^2 = \hat{7}^2 = \hat{1} \Rightarrow \hat{x}^2 = \hat{1}$ $\hat{x}^7 = \hat{x} \cdot \hat{1} \cdot \hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{x}$. Din $\hat{x}^7 = \hat{1} \Rightarrow \hat{x} = \hat{1}$.	2p 3p
5p	c) $\hat{x}^9 = \hat{x} + 1 \Rightarrow \hat{x}^9 - \hat{x} - \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow x^9 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^9 - x - 1 \vdots 10$ $x^9 - x - 1$ este număr par, fals, deoarece $x^9 - x = x(x^8 - 1)$ este par.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2-4})' \cdot (x+2) - \sqrt{x^2-4} \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \cdot (x+2) - \sqrt{x^2-4}}{(x+2)^2} =$ $= \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 4)}{(x+2)^2 \cdot \sqrt{x^2-4}} = \frac{2(x+2)}{(x+2)^2 \sqrt{x^2-4}} = \frac{2}{(x+2) \sqrt{x^2-4}}.$ $x+2 < 0, \forall x \in (-\infty, -2); \sqrt{x^2-4} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ pe $(-\infty, -2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare.	3p 2p
5p	b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ x \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ asimptotă orizontală spre } -\infty.$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{-\sqrt{x^2-4}}{-(x+2)} = - \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}} = - \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = -\infty,$ $x = -2$ asimptotă verticală	2p 3p
5p	c) Din f strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow f(x) < -1$ $\forall x \in (-\infty, -2)$ Avem $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 < e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Așadar $f(x) < -1 < e^x - 1, \forall x \in (-\infty, -2)$	2p 3p

5p	2. a) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big _0^1 =$ $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big _0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$	3p 2p
5p	b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2 + x + 1} dx \leq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow (I_n)_{n \geq 0}$ este descrescător. $\frac{x^n}{x^2 + x + 1} \geq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow I_n \geq 0$. Avem : $I_0 \geq I_1 \geq I_2 \geq \dots \geq I_n \geq \dots \geq 0 \Rightarrow (I_n)_{n \geq 0}$ este mărginit	2p 3p
5p	c) $\frac{x^n}{x^2 + x + 1} \leq x^n, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow I_n \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1}$ Din $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, aplicând criteriul “cleștelui” $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$	3p 2p