



Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Știind că $z \in \mathbb{C}$ și că $z^2 + z + 2 = 0$, demonstrați că $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$.
- 5p 2. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ inecuația $f(x) \geq f(1-2x)$, dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x + 1}$.
- 5p 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x \in (0, \infty)$.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N astfel încât $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ și $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
Demonstrați că punctele D , M și N sunt coliniare.
- 5p 6. Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde m este un număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care $\det(A(m)) \neq 0$.
- 5p c) În reperul cartezian (xOy) considerăm punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m, m^2)$, $C(m+1, (m+1)^2)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui m , știind că aria triunghiului ABC este egală cu 1.
2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că, dacă $a * a = b$ și $b * b = a$, atunci $a = b = 2$ sau $a = b = \frac{9}{5}$.
- 5p c) Determinați numerele reale nenule m , știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = me^x + 2$ verifică relația $f(x+y) = f(x) * f(y)$, pentru orice numere reale x și y .



SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$.
- 5p a) Studiați existența asimptotelor verticale la graficul funcției f .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $P(x_0, f(x_0))$, care este paralelă cu dreapta d , de ecuație $x - 4y + 2023 = 0$.
- 5p c) Demonstrați că $\ln(1 + \sqrt{1 + n^2}) \leq \sqrt{1 + n^2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 1 + \ln(1 + \sqrt{2})$.
- 5p b) Determinați $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\int_0^a f(\operatorname{tg} x) dx = \frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4}$.
- 5p c) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = 0$.



Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 + z + 2 = 0 \Rightarrow z \neq 0$ și $z + \frac{2}{z} = -1$ $\left(z + \frac{2}{z}\right)^2 = 1$, așadar $z^2 + 4 + \frac{4}{z^2} = 1$, de unde obținem $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$.	2p 2p 1p
2.	Inecuația este $1 + x^2 \geq 1 + (1 - 2x)^2$ $3x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1$	2p 2p 1p
3.	$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 - 1 = 1$ $x = -\sqrt{2}$, care nu convine, sau $x = -1$, care nu convine, sau $x = 1$ care nu convine, sau $x = \sqrt{2}$, care convine.	2p 2p 1p
4.	$T_{k+1} = C_{14}^k (x^3)^{14-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = C_{14}^k x^{42-\frac{7k}{2}}, k = \overline{0, 14}$. $42 - \frac{7k}{2} = 0 \Rightarrow k = 12$ $\Rightarrow T_{13} = C_{14}^{12} = 91$	2p 1p 2p
5.	$\overline{DM} = \overline{DA} + \overline{AM} = \overline{DA} + \frac{1}{4}\overline{AC} = \overline{DA} + \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AD}) = \frac{1}{4}(\overline{AB} - 3\overline{AD})$ $\overline{DN} = \overline{DA} + \overline{AN} = \overline{DA} + \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{AB} - 3\overline{AD}) = \frac{4}{3}\overline{DM}$, adică $\overline{DM}$ și $\overline{DN}$ sunt coliniari, de unde obținem coliniaritatea punctelor D, M și N .	2p 2p 1p
6.	$\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC}$ Dar, $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} < \frac{AB^2 + AC^2}{2AB \cdot AC}$, obținem $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)$.	2p 2p 1p



SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 = 0$	1p 2p 2p
b)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1), \text{ pentru orice număr real } m.$ $\det(A(m)) \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$	3p 2p
c)	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \Delta , \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow m(m-1) = 2, \text{ deci, } m^2 - m = 2, \text{ de unde obținem } m = -1 \text{ sau } m = 2; \text{ convin}$ ambele valori, sau $m^2 - m = -2$, care nu convine.	2p 2p 1p
2.a)	$x * y = -5xy + 10x + 10y - 20 + 2 =$ $= -5x(y-2) + 10(y-2) + 2$ $= 2 - 5(x-2)(y-2)$	2p 2p 1p
b)	$a * a = b \Leftrightarrow 2 - 5(a-2)^2 = b.$ $b * b = a \Leftrightarrow 2 - 5(b-2)^2 = a, \text{ de unde } a - 2 = -125(a-2)^4.$ Obținem, astfel, $a = 2 = b$, sau $a - 2 = -\frac{1}{5} \Rightarrow a = \frac{9}{5} = b$	1p 2p 2p
c)	$f(x+y) = m \cdot e^{x+y} + 2, \text{ iar}$ $f(x) * f(y) = 2 - 5 \cdot m^2 \cdot e^{x+y}$ Ținând cont de condiția $m \neq 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{5}.$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \frac{x}{1 + \ln x} = -\infty, \text{ iar } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{e} \\ x > \frac{1}{e}}} \frac{x}{1 + \ln x} = +\infty;$ astfel, $x = \frac{1}{e}$ este ecuația asimptotei verticale.	2p 1p
-------------	---	--------------



	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{1 + \ln x} = 0$; dacă $x_0 \in (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$. Nu mai sunt alte asimptote verticale.	2p
b)	Panta tangentei în punctul $P(x_0, f(x_0))$, la graficul funcției, este egală cu panta dreptei d $f'(x_0) = \frac{1}{4}$ $f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$; obținem ecuația $\frac{1}{4} = \frac{\ln x_0}{(1 + \ln x_0)^2} \Rightarrow (\ln x_0 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = e, f(e) = \frac{e}{2}$. Ecuația tangentei în punctul $P\left(e, \frac{e}{2}\right)$ este $x - 4y + e = 0$.	1p 2p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(1), \forall x \geq 1$. Astfel, $x \geq 1 + \ln x, \forall x \geq 1$. Relația este adevărată și pentru $x = 1 + \sqrt{1 + n^2}, \forall n \geq 1$. Obținem: $\ln(1 + \sqrt{1 + n^2}) \leq \sqrt{1 + n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	1p 2p 2p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =$ $= \left(x + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) \Big _0^1 =$ $= 1 + \ln(1 + \sqrt{2})$.	1p 2p 2p
b)	$f(\operatorname{tg} x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = 1 + \cos x$ $\int_0^a (1 + \cos x) dx = (x + \sin x) \Big _0^a = a + \sin a$. $a + \sin a = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$.	2p 2p 1p
c)	f este funcție pară; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $f'(x) = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$. f este crescătoare dacă $x \in (-\infty, 0] (f'(x) \geq 0)$; f este descrescătoare dacă $x \in [0, \infty)$ $(f'(x) \leq 0), f(0) = 2$; astfel, $1 < f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. $\int_0^x 1 dt < \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x 2 dt \Rightarrow x < \int_0^x f(t) dt \leq 2x \Rightarrow \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{2}{x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = 0$.	2p 2p 1p