

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
Model ianuarie 2024
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

- 5p 1) Calculați $\log_3(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}) - \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}}$.
- 5p 2) Se consideră funcția strict crescătoare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Determinați numerele reale a și b știind că funcția f îndeplinește condiția: $f(x) - f^{-1}(x) = \frac{8}{9}[f(x) + 1]$ pentru orice x real, unde f^{-1} este inversa funcției f .
- 5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) < 1$.
- 5p 4) Determinați probabilitatea ca alegând un număr format din 2 cifre, acesta să fie divizor al lui 2024.
- 5p 5) În sistemul ortogonal de axe xOy se consideră vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = (m+2)\vec{i} - m\vec{j}, \vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. Determinați numărul real m pentru care unghiul format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este egal cu unghiul format de vectorii $\vec{b}$ și $\vec{c}$.
- 5p 6) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x \cos 2x = \sin^2 x - 2$.

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

- 5p 1) Se consideră permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in S_4$.
- 5p a) Calculați α^{2024} .
- 5p b) Rezolvați în S_4 ecuația $\alpha \cdot x = \beta^{-1}$.
- 5p c) Rezolvați în S_4 ecuația $x^2 = \beta$.
- 2) Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = (x + 4)(y + 4) + 2$.
- 5p a) Demonstrați că $\hat{3}$ este element neutru al legii de compoziție.
- 5p b) Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Z}_6$ ecuația $x \circ x \circ x = x$.
- 5p c) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6, f(x) = x \circ \hat{1}$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

- 5p 1) Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.
- a) Determinați imaginea funcției f .

5p b) Demonstrați că pentru orice $x \in (0, \infty)$ funcția f este convexă.

5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 1}{f'(x)}$.

2) Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^3 + 1)}$.

5p a) Determinați $\int (x^2 - x + 1) f(x) dx$.

5p b) Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.

5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 x^{-n+1} f(x) dx$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$
Model ianuarie2024
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

1.	$\log_3(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}) - \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}} = \log_3(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}) + \log_3(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}) =$ $= \log_3(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}) = \log_3(5 - 4) = 0$	3p 2p
2.	Cum funcția este inversabilă pentru orice x real, avem $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, $a \neq 0$ Condiția din enunț devine $ax + b - \frac{x-b}{a} = \frac{8}{9}(ax + b + 1) \Rightarrow a = 3, b = 2$ sau $a = -3, b = -4$ care nu convine.	2p 3p
3.	Din $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 x > \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2}$ $x \in (\sqrt{2}, \infty)$	3p 2p
4.	$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Numerele de două cifre, divizori ai lui 2024 sunt: $\{11, 22, 23, 44, 46, 88, 92\}$, deci avem 7 cazuri favorabile. Sunt 90 de numere formate din două cifre, deci avem 90 cazuri posibile Probabilitatea este $P = \frac{7}{90}$	3p 2p
5.	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{m+6}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{(m+2)^2 + m^2}}, \cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{5m+4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{(m+2)^2 + m^2}}$ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{b}, \vec{c}) \Rightarrow m = \frac{1}{2}$	3p 2p
6.	Cum $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ecuația devine $2\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\sin^2 x + 3\sin x + 2) = 0$ Soluția care convine este $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	3p 2p

Str. Lucian Blaga, nr. 26

550169, Sibiu

Tel: +40 (0) 369 10 12 02

Fax: +40 (0) 269 21 08 17

www.isjsb.ro

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

1.a)	$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$	3p
	$\alpha^{2024} = (\alpha^2)^{1012} = e$	2p
b)	$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \beta$	2p
	$x = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} = \alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3p
c)	Fie $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \in S_4$. Ecuația devine	2p
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	3p
2.a)	Se obțin soluțiile $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	3p
	$\hat{3} \circ x = x + \hat{4} + \hat{2} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_6$	2p
b)	$x \circ \hat{3} = \hat{4} + x + \hat{2} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_6$, deci $\hat{3}$ este element neutru al legii de compoziție	3p
	$x \circ x \circ x = x \Leftrightarrow (x + \hat{4}) \left[(x + \hat{4})^2 - \hat{1} \right] = \hat{0}$	2p
c)	Toate elementele $x \in \mathbb{Z}_6$ verifică ecuația.	3p
	$f(x) = x \circ \hat{1} = \hat{5}x + \hat{4}$	2p
c)	Cum $f(\hat{0}) = \hat{4}, f(\hat{1}) = \hat{3}, f(\hat{2}) = \hat{2}, f(\hat{3}) = \hat{1}, f(\hat{4}) = \hat{0}, f(\hat{5}) = \hat{5}$ funcția este bijectivă	3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

1.a)	$f'(x) = -2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \frac{1}{x^2} < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ deci f este strict	3p
	descrescătoare pe $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	
b)	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \text{Im } f = (0, 1) \cup (1, \infty)$	2p
	$f''(x) = \frac{2^x \ln 2}{x^4} (\ln 2 + 2x)$	2p
b)	$\frac{2^x \ln 2}{x^4} > 0, \ln 2 + 2x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ pentru orice $x > 0$, deci funcția f este convexă	3p
	pentru orice $x > 0$	

c)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{-2^x \ln 2} \cdot x^2 = -\frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2^x} - 1\right) \cdot x}{\frac{1}{2^x}} \cdot x.$ Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^x} - 1\right) \cdot x = \ln 2$ avem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 1}{f'(x)} = -\infty$	3p 2p
2.a)	$\int (x^2 - x + 1) f(x) dx = \int \frac{1}{x(x+1)} dx$ $= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \frac{x}{x+1} + c, c \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3x^2}{x^3(x^3+1)} dx.$ Folosind notația $x^3 = t$ se obține $\frac{1}{3} \int_1^8 \frac{1}{t(t+1)} dt = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{9}$	3p 2p
c)	$\int_1^2 x^{-n+1} f(x) dx = \int_1^2 x^{-n+1} \frac{1}{x(x^3+1)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^n(x^3+1)} dx$ Cum $0 < \frac{1}{x^n(x^3+1)} < \frac{1}{x^n}$. Se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 x^{-n+1} f(x) dx = 0$	2p 3p