

REZOLVARE SIMULARE JUDETEANA VRANCEA 2023

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p

1. Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{1}{6}\right)$ este egal cu : $\frac{2}{6} \cdot \left(-\frac{6}{1}\right) = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{6}{1}\right) = 1$

- a) 1
- b) $\frac{1}{6}$
- c) 0
- d) -1

5p

2. A 23-a zecimală a numărului $2,(023)$ este:

- a) 3
- b) 4
- c) 2
- d) 0

$2,(023) = 2, \underbrace{023\ 023\ \dots\ 023}_{7\ \text{grupe} = 21\ \text{cifre}} 02$

5p

3. Dacă 8 kg de mere costă 20 lei, atunci 6 kg de mere costă:

- a) 12 lei
- b) 10 lei
- c) 18 lei
- d) 15 lei

$$\frac{8}{6} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 20}{8} = 15 \text{ lei}$$

$\begin{array}{l} 8\ \text{kg m} \dots\dots\dots 20\ \text{lei} \\ 6\ \text{kg m} \dots\dots\dots x\ \text{lei} \end{array}$

5p

4. Mulțimea $A = \{a \in \mathbb{R} / -9 \leq 2a - 1 < 5\}$ este egală cu:

- a) $(-4; 3)$
- b) $[-5; 3)$
- c) $(-4; 3]$
- d) $[-4; 3)$

$$\begin{aligned} -9 &\leq 2a - 1 < 5 \quad | +1 \\ -8 &\leq 2a < 6 \quad | :2 \\ -4 &\leq a < 3 \Rightarrow a \in [-4, 3) \end{aligned}$$

5p

5. Patru elevi calculează media geometrică a numerelor $a = 3 - \sqrt{5}$ și $b = \sqrt{9} + \sqrt{5}$ iar rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

$$b = 3 + \sqrt{5}$$

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

Ana	Barbu	Crina	Darius
6	4	2	3

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică a celor două numere este:

- a) Darius
- b) Crina
- c) Ana
- d) Barbu

$$m_g = \sqrt{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

5p

6. Mihnea are 16 ani iar Tudor are 12 ani. Tudor afirmă: „acum 3 ani eu aveam jumătate din vârsta pe care o va avea Mihnea peste 2 ani.”

Afirmația lui Tudor este:

- a) adevărată
- b) falsă

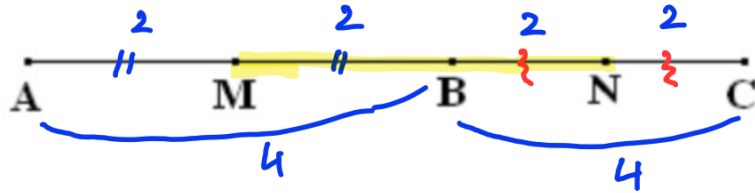
prezent $\begin{array}{c|c} M & T \\ \hline 16 & 12 \end{array}$

trecut $\begin{array}{c|c} M & T \\ \hline 13 & 9 \end{array}$

viitor $\begin{array}{c|c} M & T \\ \hline 18 & 14 \end{array}$

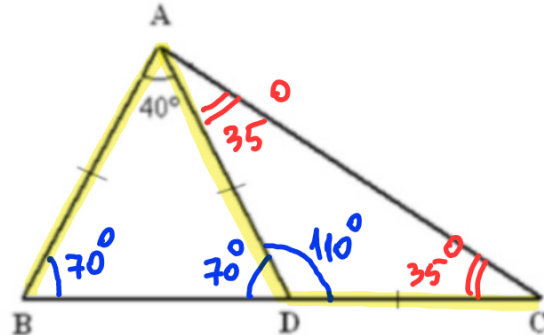
- 5p 1. În figura alăturată, punctele A, B, C sunt coliniare, M este mijlocul segmentului AB și N este mijlocul segmentului BC. Dacă $AB = 8$ cm și $BC = 4$ cm, atunci lungimea segmentului MN este egală cu:

- a) 4 cm
b) 8 cm
c) 12 cm
d) 6 cm



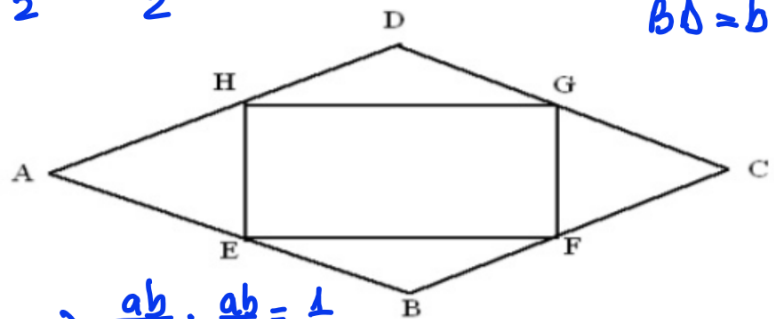
- 5p 2. Triunghiurile ABD și ADC au $AB \equiv AD \equiv DC$ iar $\angle BAD = 40^\circ$. Măsura unghiului ACB este egală cu:

- a) 35°
b) 40°
c) 70°
d) 110°



- 5p 3. În romb ABCD din figura alăturată, punctele E, F, G și H sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv AD. Raportul dintre aria patrulaterului EFGH și aria rombului ABCD este egal cu:

- a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4}$
- $A_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{ab}{2}$
 $EF = HG = \frac{a}{2}$ (l.m)
 $EH = FG = \frac{b}{2}$ (l.m)
 $HEFG$ - dreptunghi
 $A_{HEFG} = \frac{ab}{4}$

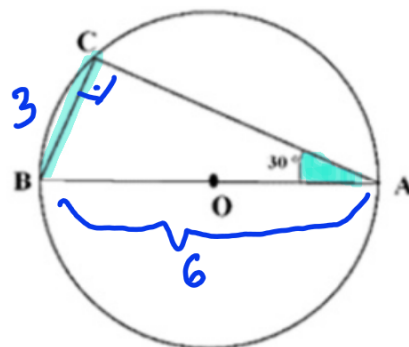


$$\begin{aligned} AC &= a \\ BD &= b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{4} : \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}$$

- 5p 4. În cercul de centru O din figura alăturată, diametrul AB are lungimea de 6 cm și $\angle CAB = 30^\circ$. Lungimea coardei AC este egală cu :

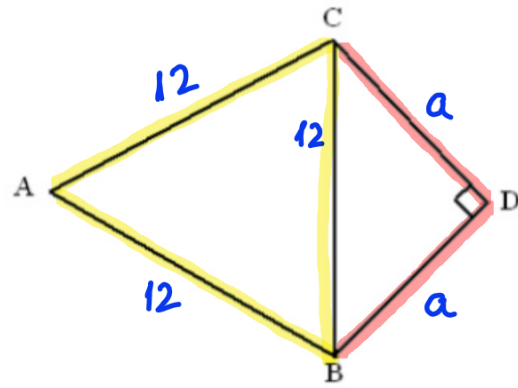
- a) 3 cm
b) 6 cm
c) $3\sqrt{3}$ cm
d) 5 cm
- $AB^2 = BC^2 + AC^2$
 $36 = 9 + AC^2$
 $AC^2 = 27 \Rightarrow AC = 3\sqrt{3}$



5p 5. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral cu latura 12 cm iar triunghiul BCD este dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC. Lungimea segmentului BD este egală cu:

- a) $6\sqrt{2}$ cm
b) 12 cm
c) $6\sqrt{3}$ cm
d) 6 cm

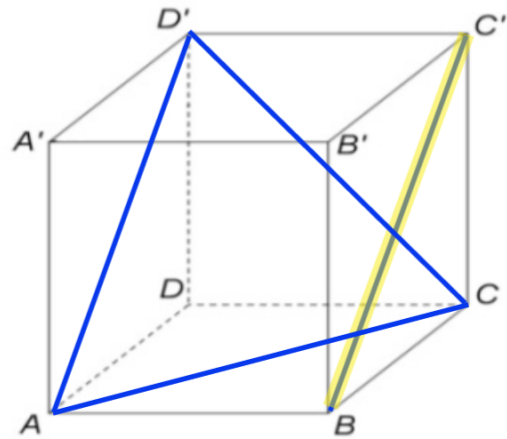
$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 \\ 144 &= a^2 + a^2 \\ 2a^2 &= 144 \\ a^2 &= 72 \\ a &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$



5p 6. ABCDA'B'C'D' din figura alăturată este un cub. Măsura unghiului dreptelor BC' și D'C este egală cu:

- a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°

$$\begin{aligned} BC' \parallel AD' &\Rightarrow (\widehat{BC'D'C}) = (\widehat{CD'A'D'}) = \widehat{AD'C} \\ AC &= AD' = CD' = l\sqrt{2} \\ m\widehat{AD'C} &= 60^\circ \end{aligned}$$



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(30 puncte)

5p 1. Fie $\overline{ab}$ un număr natural cu proprietatea
 $\overline{ab} = 4a + 3b$

(2p) a) Numărul $\overline{ab}$ poate fi 15? Justificați.

$$\overline{ab} = 15 \Rightarrow 15 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \Rightarrow 15 \neq 19 \quad (\text{F})$$

(3p) b) Calculați media aritmetică a numerelor de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea din enunț.

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= 10a + b \\ \overline{ab} &= 4a + 3b \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 10a + b &= 4a + 3b \Rightarrow 6a = 2b \quad |:2 \\ 3a &= b \end{aligned}$$

$$b \neq 0, \quad b=1 \Rightarrow a=3 \Rightarrow 31$$

$$b=2 \Rightarrow a=6 \Rightarrow 62$$

$$b=3 \Rightarrow a=9 \Rightarrow 93$$

$$\frac{31 + 62 + 93}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

2. Se dau numerele

$$x = (1,25 + \sqrt{4\frac{1}{2}} : \frac{12}{\sqrt{98}}) \cdot \sqrt{(-3)^2}$$

și

$$y = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{48}$$

(2p) a) Demonstrați ca $x = 9$.

$$a, b, c = \frac{abc}{100}$$

$$\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{a-\sqrt{b}}} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{a-b}$$

$$(-1)^{\text{nr par}} = 1$$

$$(-1)^{\text{nr impar}} = -1$$

$$\begin{array}{r} 98 \overline{) 2} \\ 49 \overline{) 7^2} \\ 1 \end{array} \quad \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$x = \left(\frac{125}{100} + \sqrt{\frac{4 \cdot 2 + 1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{98}}{12} \right) \cdot \sqrt{9}$$

$$x = \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{12} \right) \cdot 3 = \left(\frac{5}{4} + \frac{3 \cdot 7}{12} \right) \cdot 3 = \left(\frac{5}{4} + \frac{7}{4} \right) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$$

(3p) b) Stabiliți dacă $N = \sqrt{x+y}$ este pătrat perfect.

$$y = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{48} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2 - \sqrt{3}^2} - 4\sqrt{3} =$$

$$= \frac{4+4\sqrt{3}+3}{1} - 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 7$$

$$N = \sqrt{x+y} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4 = 2^2 \Rightarrow N - \text{p.p.}$$

$$\begin{array}{r} 48 \overline{) 2} \\ 24 \overline{) 2} > 2 \\ 12 \overline{) 2} > 2 \\ 6 \overline{) 2} > 2 \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

5p 3. Se consideră expresia $E(x) = (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$, unde x este număr real.

(2p) a) Arătați că $(x+2)(x+5) = x^2 + 7x + 10$ pentru orice număr real x .

$$a) (x+2)(x+5) = x(x+5) + 2(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

(3p) b) Demonstrați că $\sqrt{E(n)}$ este număr natural, oricare ar fi numărul natural n .

$$b) (x+3)(x+4) = x(x+4) + 3(x+4) = x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12$$

$$E(x) = (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) + 1$$

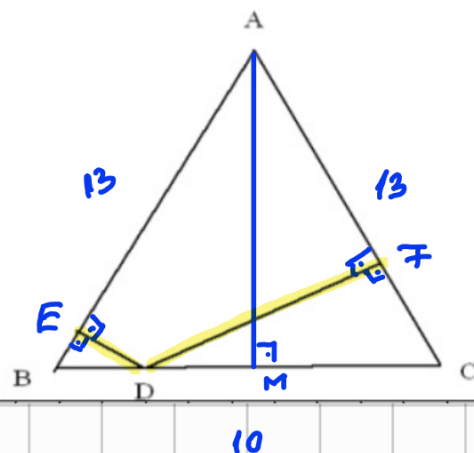
$$\text{Not } x^2 + 7x + 10 = t \Rightarrow E(t) = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$$

$$\Rightarrow E(x) = (x^2 + 7x + 11)^2 \Rightarrow \sqrt{E(n)} = \sqrt{(x^2 + 7x + 11)^2} = x^2 + 7x + 11 \in \mathbb{N}$$

5p 4. În triunghiul ABC cu $AB = AC = 13$ cm și $BC = 10$ cm, se consideră D un punct oarecare al laturii BC.

(2p) a) Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 60 cm^2 .

$$\begin{aligned} & \text{M - mij } BC \quad \Bigg| \Rightarrow \triangle AMC, \hat{M} = 90^\circ \\ & \triangle ABC \text{ isoscel} \quad \Bigg| \quad AC^2 = AM^2 + CM^2 \\ & \quad \quad \quad 169 = AM^2 + 25 \Rightarrow AM^2 = 144 \\ & \quad \quad \quad AM = 12 \text{ cm} \\ & A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



(3p) b) Demonstrați că suma distanțelor de la D la laturile AB și AC este mai mare decât 9 cm.

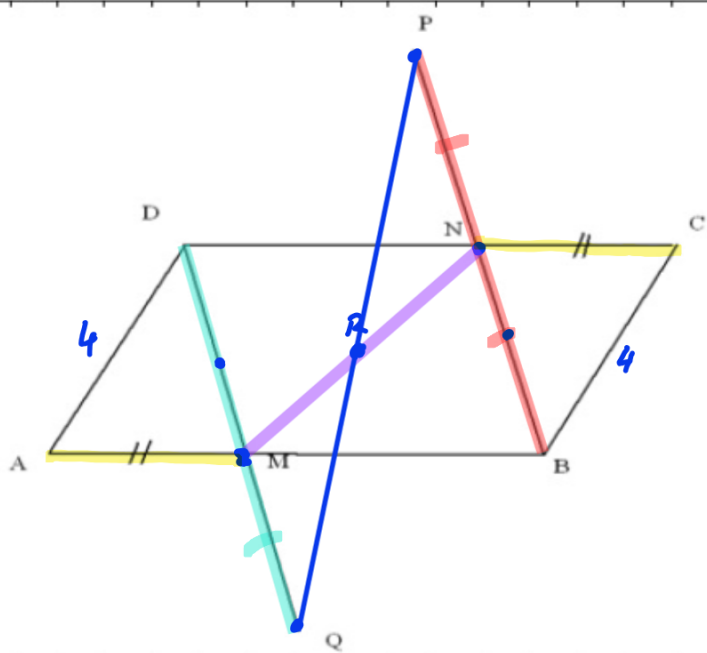
$$\begin{aligned} A_{\triangle ABC} &= A_{\triangle ADC} + A_{\triangle ADB} = \frac{DF \cdot AC}{2} + \frac{DE \cdot AB}{2} = \frac{13}{2} (DF + DE) \\ \Rightarrow 60 &= \frac{13}{2} (DF + DE) \Rightarrow DF + DE = \frac{120}{13} = 8, \dots < 9 \end{aligned}$$

5. În figura alăturată, se dă paralelogramul ABCD cu $AB = 6$ cm și $AD = \frac{2}{3}$ din CD. Pe laturile

AB și CD se consideră punctele M și respectiv N, astfel încât $CN \equiv AM$, punctul P este simetricul lui B față de N și Q este simetricul lui D față de M.

(2p) a) Arătați că perimetrul lui ABCD este egal cu 20 cm.

$$\begin{aligned} AD &= \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ cm} \\ P_{ABCD} &= 2AB + 2AD = 12 + 8 = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$



(3p) b) Demonstrați că punctele P, Q și mijlocul segmentului MN sunt coliniare.

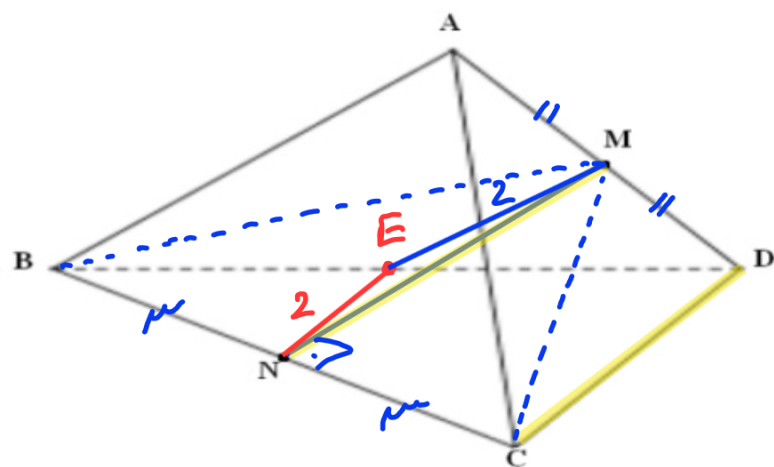
$$\begin{aligned} & MB \parallel ND \quad \Bigg| \Rightarrow MBND - \text{paralelogram} \Rightarrow R - \text{mij } MN \text{ și } BD \\ & MB = ND \\ & DR \parallel PB \quad \Bigg| \Rightarrow DRBP - \text{paralelogram} \Rightarrow R - \text{mij } PR \text{ și } BD \\ & DR = PB \quad \Bigg| \Rightarrow P, R, Q \text{ coliniare} \end{aligned}$$

6. Tetraedrul regulat $ABCD$ din figura alăturată are aria totală egală cu $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

(2p)a) Arătați că $CD = 4 \text{ cm}$.

$$A_t = 4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = l^2 \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 \sqrt{3} = 16\sqrt{3} \Rightarrow l^2 = 16 \Rightarrow l = 4$$



(3p) b) Aflați măsura unghiului determinat de dreptele MN și CD , unde M și N sunt mijloacele segmentelor AD și respectiv BC .

Fie E - mij $BD \Rightarrow NE \cdot l$ în $\triangle BCD \Rightarrow NE \parallel CD$

$$\widehat{(MN, CD)} = \widehat{(MN, NE)} = \widehat{ENM}$$

$\triangle BMC$ înscris ($CM = BM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$), $NC = 2$

$$\triangle MNC, \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow MC^2 = MN^2 + NC^2 \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 = MN^2 + 2^2$$

$$\Rightarrow MN^2 = 8 \Rightarrow MN = 2\sqrt{2}$$

$$EM = 2$$

$$EN = 2$$

$$MN = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \triangle ENM$ - dreptunghic în E

$\triangle ENM$ - înscris $\Rightarrow$ în $\widehat{ENM} = 45^\circ$