

Simulare județeană a examenului național de bacalaureat 2023
Februarie 2023
Proba E. c) - Matematică M_șt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

- 5p 1. Determinați suma primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4$. Calculați $(f \circ f)(3)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x = 1$.
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care au proprietatea $f(1) = f(2) = 3$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(3, 6)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.
- 5p 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, știind $AC = \sqrt{6}$, iar unghiurile $A = \frac{5\pi}{12}$ și $B = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 2x-8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4-x & 0 & 2x-7 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = -1$.
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A((x-3)(y-3)+3)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A(8)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14.$$
- 5p a) Arătați că $2 \circ (-1) = 2$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x \leq 5$.
- 5p c) Calculați $\sqrt[3]{1} \circ \sqrt[3]{2} \circ \dots \circ \sqrt[3]{2023}$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 7$.
- 5p a) Arătați că $f'(0) = 0$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $(1-x)e^x \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 1)$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = e - 1$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{e^{-x} f(x)}{x^2} dx = \frac{3}{2}$.

Simulare județeană a examenului național de bacalaureat 2023

Februarie 2023

Proba E. c) - Matematică M_șt-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 = a_3 - 2r$, $a_2 = a_3 - r$, $a_4 = a_3 + r$, $a_5 = a_3 + 2r$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3 = 10$	3p 2p
2.	$f(3) = -5$ $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(-5) = -21$	2p 3p
3.	$x^2 - 2x + 5 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = x^2 + 2x + 1$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	$f(3)$ și $f(4)$ pot fi alese în câte 4 moduri Există $4 \cdot 4 = 16$ funcții $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care au proprietatea $f(1) = f(2) = 3$	3p 2p
5.	$x_M = 1$, $y_M = 4$, unde M este mijlocul segmentului AB $m_{AB} = 1 \Rightarrow m_{mediatoare} = -1$, deci ecuația mediatoarei segmentului AB este $y = -x + 5$	2p 3p
6.	$C = \frac{\pi}{3}$ $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$ $= -9 + 0 + 0 - (-8) - 0 - 0 = -9 + 8 = -1$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} -xy + 3x + 3y - 7 & 0 & 2xy - 6x - 6y + 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -xy + 3x + 3y - 8 & 0 & 2xy - 6x - 6y + 17 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 5 - (xy - 3x - 3y + 12) & 0 & 2(xy - 3x - 3y + 12) - 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 - (xy - 3x - 3y + 12) & 0 & 2(xy - 3x - 3y + 12) - 7 \end{pmatrix} = A(xy - 3x - 3y + 12) =$ $= A((x-3)(y-3)+3)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A(8) \Leftrightarrow A((a-3)(b-3)(c-3)+3) = A(8)$ $(a-3)(b-3)(c-3) = 5$, de unde numerele $\overline{abc}$ sunt: 448, 484, 844, 228, 282, 822	3p 2p

2.a)	$2 \circ (-1) = 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) + 14 =$	3p
	$= -6 - 12 + 6 + 14 = 2$	2p
b)	$3x^2 - 12x + 14 \leq 5 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) \leq 0$	3p
	$x \in [1, 3]$	2p
c)	$x \circ 2 = 2$ și $2 \circ y = 2$, pentru orice numere reale x și y	2p
	$\sqrt[3]{1} \circ \sqrt[3]{2} \circ \dots \circ \sqrt[3]{2023} = ((\sqrt[3]{1} \circ \sqrt[3]{2} \circ \dots \circ \sqrt[3]{7}) \circ 2) \circ (\sqrt[3]{9} \circ \sqrt[3]{10} \circ \dots \circ \sqrt[3]{2023}) =$ $= 2 \circ (\sqrt[3]{9} \circ \sqrt[3]{10} \circ \dots \circ \sqrt[3]{2023}) = 2$	3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x - 1$	3p
	$f'(0) = e^0 - 1 = 0$	2p
b)	$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{7}{x} \right) = 0 - 1 - 0 = -1$	2p
	$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 7) = -7$	2p
	Dreapta de ecuație $y = mx + n$, adică $y = -x - 7$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	1p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	1p
	$f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$. Cum $f(0) = -6$, obținem $f(x) \geq -6$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p
	$f(-x) \geq -6$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(1-x)e^x \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big _0^1 =$	3p
	$= e - 1$	2p
b)	F este primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p
	$F''(x) = f'(x) = e^x (x+1)^2 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este convexă	3p
c)	$\int_1^a \frac{e^{-x} f(x)}{x^2} dx = \int_1^a \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(x - \frac{1}{x} \right) \Big _1^a = a - \frac{1}{a}$	3p
	$a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	2p