

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $3(4 - 5i) + 5i(3 + 2i) = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $(g \circ f)(1) = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(6x - x^2) = \log_2(4 + x)$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea $A = \{3, 4, 5, 7, 9\}$. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea A .
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 2)$ și $B(6, 4)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $2\overline{AC} = \overline{OB}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 4$ și raza cercului circumscris egală cu 4. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2az = a + 1 \\ ax + y = 0 \\ x + y - az = -1 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$.
- 5p b) Pentru $a = 1$, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0 = a$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + m$, unde m este număr real.
- 5p a) Pentru $m = 3$, arătați că $f(1) = 0$.
- 5p b) Determinați numerele reale m pentru care $(x_1 x_2 x_3 x_4)^2 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1$, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Pentru $m = 0$, determinați numerele reale a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - a$ este egal cu a .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x^2 - 4)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că $f(7x) - f(x) \leq 2\sqrt{2}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 1 + e^{2x}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 (f(x) - e^{2x}) dx = 24$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 4x(f(x) - 3x^2 + 1) dx = e^2 + 1$.

5p c) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{f(t)}{t+1} dt = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3(4-5i)+5i(3+2i)=12-15i+15i+10i^2=$ $=12-10=2$	3p 2p
2.	$f(1)=5, (g \circ f)(1)=g(5)=10+a$, pentru orice număr real a $10+a=1$, de unde obținem $a=-9$	3p 2p
3.	$6x-x^2=4+x$, de unde obținem $x^2-5x+4=0$ $x=1$ sau $x=4$, care convin	2p 3p
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 4 = 16$ numere	2p 3p
5.	$\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=x_C\vec{i}+(y_C-2)\vec{j}$ $2x_C\vec{i}+2(y_C-2)\vec{j}=6\vec{i}+4\vec{j}$, de unde obținem $x_C=3$ și $y_C=4$	2p 3p
6.	$BC=8$, de unde obținem $AC=4\sqrt{3}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC}=\frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=$ $=-4+8+0-4-0+4=4$	2p 3p
b)	$a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=2 \\ x+y=0 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$ și $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ și $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$, deci sistemul de ecuații are o infinitate de soluții	2p 3p
c)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}=2a^2-2a$, pentru orice număr real a și, cum sistemul de ecuații are soluție unică, obținem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ Obținem $x_0=-\frac{1}{2}$, deci $a=-\frac{1}{2}$, care convine	2p 3p
2.a)	$f=X^4-3X^3+X^2-2X+3 \Rightarrow f(1)=1^4-3 \cdot 1^3+1^2-2 \cdot 1+3=$ $=1-3+1-2+3=0$	3p 2p

b)	$x_1x_2x_3x_4 = m$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow (x_1x_2x_3x_4)^2 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = m^2 - 3$, pentru orice număr real m	3p
	$m^2 - 3 = 1$, deci $m^2 - 4 = 0$, de unde obținem $m = -2$ sau $m = 2$	2p
c)	$f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X$ și $f(a) = a$, de unde obținem $a^4 - 3a^3 + a^2 - 3a = 0$	3p
	$a(a-3)(a^2+1) = 0$ și, cum a este număr real, obținem $a = 0$ sau $a = 3$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2+1} - (x^2+6) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$	3p
	$= \frac{2x^3 + 2x - x^3 - 6x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(x^2-4)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(0) = 6$, $f'(0) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 6$	3p
c)	Pentru orice $x \in [0, 2]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0, 2]$ și, pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
	$x \in [0, 1] \Rightarrow 7x \in [0, 7]$, $f(0) = 6$, $f(1) = \frac{7}{\sqrt{2}}$, $f(7) = \frac{11}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $\frac{7}{\sqrt{2}} \leq f(x)$ și $f(7x) \leq \frac{11}{\sqrt{2}}$, deci $f(7x) - f(x) \leq 2\sqrt{2}$, pentru orice $x \in [0, 1]$	3p
2.a)	$\int_0^3 (f(x) - e^{2x}) dx = \int_0^3 (3x^2 - 1) dx = \left(x^3 - x \right) \Big _0^3 =$	3p
	$= 24 - 0 = 24$	2p
b)	$\int_0^1 4x(f(x) - 3x^2 + 1) dx = \int_0^1 2x(e^{2x})' dx = 2xe^{2x} \Big _0^1 - e^{2x} \Big _0^1 =$	3p
	$= 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{f(t)}{t+1} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x \frac{f(t)}{t+1} dt \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x(x+1)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{4x+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+2e^{2x}}{4x+2} = 1$	2p