

SUBIECTUL I.3

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-3} = 3$.

Rezolvare:

Impunem condiții de existență a radicalului

$$\text{C.E.: } 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației pentru a scăpa de radical.

$$\sqrt{2x-3} = 3 \mid \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = 3^2 \Rightarrow 2x-3=9 \Rightarrow 2x=9+3 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$$

Verificare: $\sqrt{2 \cdot 6 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = 3$, (A).

În concluzie, $x = 6$ este soluție a ecuației date.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-2} = x$.

Rezolvare:

$$\text{C.E.: } \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{3x-2} = x \mid \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{3x-2})^2 = x^2 \Rightarrow 3x-2 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0, \Delta = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$$

Verificare: $x = 1 \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \Rightarrow x = 1$ soluție

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{6-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ soluție.}$$

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-1} + 1 = x$.

Rezolvare:

Se folosește formula $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Rescriem ecuația dată $\sqrt{x^2-1} = x-1$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \Delta = 4, x_1 = -1, x_2 = 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [1, +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-1} = x-1 \mid \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{x^2-1})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Verificare: $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1^2-1} = 1-1 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow x = 1$ soluție

4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$.

Rezolvare:

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, 2]$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 & \quad | \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x})^2 = 1^2 \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x} + (\sqrt{2-x})^2 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{x} - 1 + 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 2 - \cancel{x} = 1 & \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 1 + 1 - 2 \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \Rightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \quad | \uparrow^2 \Rightarrow \\ (x-1)(2-x) = 0 & \Rightarrow x-1 = 0 \text{ sau } 2-x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ sau } x = 2 \\ \text{Verificare: } x = 1 & \Rightarrow \sqrt{1-1} + \sqrt{2-1} = 0 + 1 = 1, \text{ (A)} \Rightarrow x = 1 \text{ soluție} \\ x = 2 & \Rightarrow \sqrt{2-1} + \sqrt{2-2} = 1 + 0 = 1, \text{ (A)} \Rightarrow x = 2 \text{ soluție.} \end{aligned}$$

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3x-7} = 16$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 2^{3x-7} = 16 & \quad | 16 = 2^4 \Rightarrow 2^{3x-7} = 2^4 \Rightarrow 3x-7 = 4 \Rightarrow 3x = 4+7 \Rightarrow 3x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{1-3x} = \frac{1}{25}$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 5^{1-3x} = \frac{1}{25} & \quad \left| \begin{aligned} \Rightarrow 5^{1-3x} = 5^{-2} \Rightarrow 1-3x = -2 \Rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = 1. \\ \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

7. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $3^x \cdot \frac{1}{27} = 81$.

Rezolvare:

$$3^x \cdot \frac{1}{27} = 81 \Rightarrow 3^x \cdot 3^{-3} = 81 \Rightarrow 3^{x-3} = 3^4 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x-1} \cdot 25 = 1$.

Rezolvare:

$$5^{2x-1} \cdot 25 = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{2x-1} \cdot 5^2 = 5^{-1} \Rightarrow 5^{2x-1+2} = 5^{-1} \Rightarrow 5^{2x+1} = 5^{-1} \Rightarrow 2x+1 = -1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

9. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2-x-3} = \left(\frac{1}{81}\right)^{1-x}$

Rezolvare:

$$9^{x^2-x-3} = \left(\frac{1}{81}\right)^{1-x} \Rightarrow (3^2)^{x^2-x-3} = \left(\frac{1}{3^4}\right)^{1-x} \Rightarrow (3^2)^{x^2-x-3} = (3^{-4})^{1-x} \Rightarrow 3^{2(x^2-x-3)} = 3^{4(1-x)} \Rightarrow 2(x^2-x-3) = 4(1-x) \Rightarrow$$

$$2x^2 - 2x - 6 = 4 - 4x \Rightarrow 2x^2 + 2x - 10 = 0 \quad | :2 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0, \Delta = 21, x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{x+1} = 24$

Rezolvare:

$$2^x + 2^{x+1} = 24 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^1 = 24 \Rightarrow 2^x(1+2) = 24 \Rightarrow 2^x \cdot 3 = 24 \quad | :3 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 3^{x+2} = 56$.

Rezolvare:

$$3^x + 2 \cdot \frac{3^x}{3} + 3 \cdot 3^x \cdot 3^2 = 86 \Rightarrow 3^x \left(1 + \frac{2}{3} + 27 \right) = 86 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{3+2+81}{3} = 86 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{86}{3} = 86 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

12. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(5x-7) = 3$.

Rezolvare:

Condițiile de existență ce se impun asupra unui logaritm sunt:

$$\log_a x : \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{C.E.:} \begin{cases} 2 > 0, (A) \\ 2 \neq 1, (A) \\ 5x - 7 > 0 \Rightarrow 5x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\log_2(5x-7) = 3 \Leftrightarrow 5x-7 = 2^3 \Leftrightarrow 5x-7 = 8 \Leftrightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Verificare: } \log_2(5 \cdot 3 - 7) = \log_2(15 - 7) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

În concluzie, $x = 3$ este soluție a ecuației date.

13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2-x) = \log_2(x+4)$.

Rezolvare:

$$\text{C.E.:} \begin{cases} 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \\ x+4 > 0 \Rightarrow x > -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-4, 2)$$

$$\log_2(2-x) = \log_2(x+4) \Rightarrow 2-x = x+4 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Verificare: } x = -1 \Rightarrow \log_2(2 - (-1)) = \log_2(-1+4) \Leftrightarrow \log_2 3 = \log_2 3 \Rightarrow x = -1 \text{ soluție.}$$

14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_2(x-3) = \log_2 4$.

Rezolvare:

Se folosește formula $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

$$\text{C.E.:} \begin{cases} x > 0 \\ x-4 > 0 \Rightarrow x > 4 \end{cases} \Rightarrow x > 4$$

$$\log_2 x + \log_2(x-3) = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 x(x-3) = \log_2 4 \Rightarrow x(x-3) = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0, \Delta = 25, x_1 = -1, x_2 = 4$$

$$\text{Verificare: } x = -1, (F)$$

$$x = 4 \Rightarrow \log_2 4 + \log_2(4-3) = \log_2 4 \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 1 = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 4 = \log_2 4 \Rightarrow x = 4 \text{ soluție.}$$

0

15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_{\frac{1}{2}}(x-7) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) = 2$.

Rezolvare:

Se folosește formula $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x-7 > 0 \Rightarrow x > 7 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases} \Rightarrow x > 7$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-7) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-7}{x+2} = 2 \Rightarrow \frac{x-7}{x+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x-7}{x+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(x-7) = x+2 \Rightarrow 4x-28 = x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - x = 28 + 2 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{Verificare: } x = 10 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(10-7) - \log_{\frac{1}{2}}(10+2) = \log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{12} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 10$$

soluție.

16. Rezolvați ecuația $(n+2)! = 3(n+1)!$.

Rezolvare:

Se folosește formula $n! = (n-1)! \cdot n$

$$(n+2)! = 3(n+1)! \Rightarrow \cancel{(n+1)!} (n+2) = 3 \cancel{(n+1)!} \Rightarrow n+2 = 3 \Rightarrow n = 1.$$

17. Să se rezolve ecuația $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 6$.

Rezolvare:

Se folosește formula $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

$$\frac{P_{n+2}}{P_n} = 6 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{n!} = 6 \Rightarrow \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{\cancel{n!}} = 6 \Rightarrow (n+1) \cdot (n+2) = 6 \Rightarrow n^2 + 3n + 2 = 6 \Rightarrow n^2 + 3n - 4 = 0, \Delta = 25, n_1 = 1 \text{ și}$$

$$n_2 = -4 \notin \mathbb{N}.$$

18. Să se rezolve ecuația $A_n^3 = 3(n-1)$.

Rezolvare:

Se folosește formula $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Impunem condiția de existență C.E.: $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

$$A_n^3 = 3(n-1) \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 3(n-1) \Rightarrow \frac{\cancel{(n-3)!} (n-2)(n-1)n}{\cancel{(n-3)!}} = 3(n-1) \Rightarrow (n-2)(\cancel{n-1})n = 3(\cancel{n-1}) \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 16, n_1 = -1 \notin \mathbb{N}, n_2 = 3 \in \mathbb{N}.$$

19. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 6$.

Rezolvare:

Se folosește formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Impunem condiția de existență C.E.: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$C_n^2 = 6 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{\cancel{(n-2)}(n-1)n}{2\cancel{(n-2)}!} = 6 \Rightarrow \frac{(n-1)n}{2} = 6 \Rightarrow n^2 - n = 12 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0, \Delta = 49, n_1 = -3 \notin \mathbb{N}, n_2 = 4.$$

prof. Clotiu Constantin