

BACALAUREAT MATEMATICĂ TEHNOLOGIC

EXERCIȚII REZOLVATE

SUBIECTUL I

SUBIECTUL I.1

1. Arătați că $(-4) : \left(-\frac{1}{2}\right) : 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 0$.

Rezolvare:

Se folosește formula $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$

$$(-4) : \left(-\frac{1}{2}\right) : 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (-4) \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) : 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 8 : 2 - 2 = 4 - 2 = 2.$$

2. Arătați că $\sqrt{32} - 2\sqrt{8} = 0$.

Rezolvare:

$$\sqrt{32} - 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0.$$

3. Arătați că $(0,5 \cdot 10 - 2)(0,5 \cdot 10 + 2) : 7 = 3$.

Rezolvare:

Se folosește formula $0, x = \frac{x}{10}$

$$(0,5 \cdot 10 - 2)(0,5 \cdot 10 + 2) : 7 = \left(\frac{5}{10} \cdot 10 - 2\right) \left(\frac{5}{10} \cdot 10 + 2\right) : 7 = 3 \cdot 7 : 7 = 3.$$

4. Arătați că $\frac{12}{7} \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) = 2$.

Rezolvare:

Se aduce la același numitor comun în paranteză.

$$\frac{12}{7} \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{12}{7} \cdot \left(\frac{10}{6} - \frac{3}{6}\right) = \frac{12}{7} \cdot \frac{10-3}{6} = \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{6} = 2.$$

5. Arătați că $\sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) = 3$.

Rezolvare:

Se aduce la numitor comun în paranteza rotundă și se folosește formula $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 3.$$

6. Arătați că $-\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)(3+2\sqrt{3})=3$.

Rezolvare:

$$-\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)(3+2\sqrt{3}) = (-\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 2)(3+2\sqrt{3}) = (-3+2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3) = (2\sqrt{3})^2 - 3^2 = 12-9=3$$

7. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 12 - \sqrt{12}$ și $b = 8 + 2\sqrt{3}$.

Rezolvare:

Se folosește formula $m_a = \frac{a+b}{2}$

$$m_a = \frac{12 - \sqrt{12} + 8 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 2\sqrt{3} + 8 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

8. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 6$ și $a_5 = 16$. Calculați termenul a_{10} .

Rezolvare:

Se folosește formula $a_n = a_1 + (n-1)r, n \in \mathbb{N}^*$

$$a_5 = a_1 + (5-1)r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 16 = 6 + 4r \Rightarrow 4r = 10 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$

$$a_{10} = a_5 + (10-5)r \Rightarrow a_{10} = a_5 + 5r \Rightarrow a_{10} = 16 + 5 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow a_{10} = \frac{32+25}{2} = \frac{57}{2}.$$

9. Să se arate că $\log_3 4, \log_3 8$ și $\log_3 16$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Rezolvare:

Se folosește formula a, b, c termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$

$$\log_3 8 = \frac{\log_3 4 + \log_3 16}{2} \Leftrightarrow \log_3 8 = \frac{\log_3 4 \cdot 16}{2} \Leftrightarrow \log_3 8 = \frac{\log_3 64}{2} \Leftrightarrow \log_3 8 = \frac{\log_3 8^2}{2} \Leftrightarrow \log_3 8 = \frac{2\log_3 8}{2} \Leftrightarrow \log_3 8 = \log_3 8$$

10. Arătați că media geometrică a numerelor $a = 1 + \frac{1}{2}$ și $b = 6\sqrt{16}$ este egală cu 6.

Rezolvare:

Se folosește formula $m_g = \sqrt{a \cdot b}$

$$a = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad b = 6\sqrt{16} = 6 \cdot 4 = 24 \quad \Rightarrow m_g = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 24} = \sqrt{36} = 6.$$

11. Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei geometrice cu termeni pozitivi $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_3 = 8$ și $b_5 = 32$.

Rezolvare:**Metoda 1**

Se folosește formula $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$b_5 = b_3 \cdot q^{5-3} \Rightarrow 32 = 8 \cdot q^2 \Rightarrow 4 = q^2 \Rightarrow q = \pm 2 \Rightarrow q = 2 \text{ (termeni pozitivi)}$$

$$b_3 = b_2 \cdot q \Rightarrow 8 = b_2 \cdot 2 \Rightarrow b_2 = 4$$

$$b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow 4 = b_1 \cdot 2 \Rightarrow b_1 = 2$$

$$b_4 = b_3 \cdot q \Rightarrow b_4 = 8 \cdot 2 \Rightarrow b_4 = 16$$

$$S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

Metoda 2

Se folosesc formulele $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$S_5 = b_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-2^5}{1-2} = \frac{1-32}{-1} = 2 \cdot 31 = 62.$$

12. Arătați că numerele $6 - 3\sqrt{3}, 3, 6 + \sqrt{27}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Rezolvare:

Se folosește formula a, b, c termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$

$$3^2 = (6 - 3\sqrt{3})(6 + \sqrt{27}) \Leftrightarrow 9 = (6 - 3\sqrt{3})(6 + 3\sqrt{3}) \Leftrightarrow 9 = 6^2 - (3\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 9 = 36 - 27 \Leftrightarrow 9 = 9$$

13. Determinați cel mai mic element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 4x - 3\}$.

Rezolvare:

$$x^2 < 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$$

Se rezolvă ecuația de gradul II

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{array} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Prin urmare, $A = \{1; 3\}$. Cel mai mic element al mulțimii A este 1.

14. Arătați că $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^7 : 2^{26} = 4$.

Rezolvare:

Se folosește formulele $a^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot \dots \cdot a^{x_n} = a^{x_1 + x_2 + \dots + x_n}; a^x : a^y = a^{x-y}; 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^7 : 2^{26} = 2^{1+2+3+\dots+7} : 2^{26} = 2^{\frac{7(7+1)}{2}} : 2^{26} = 2^{\frac{56}{2}} : 2^{26} = 2^{28} : 2^{26} = 2^{28-26} = 2^2 = 4.$$

15. Arătați că $(-2)^3 \cdot (-2 - 2026^0) : 24 \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

Se folosește formulele $\boxed{(-1)^{\text{nr. par}} = 1, (-1)^{\text{nr. impar}} = -1}$ și $\boxed{a^0 = 1}$

$$(-2)^3 \cdot (-2 - 2026^0) : 24 = (-8) \cdot (-2 - 1) : 24 = (-8) \cdot (-3) : 24 = 24 : 24 = 1 \in \mathbb{N}$$

16. Arătați că $\log_3 6 - \log_3 2 - \log_3 3 = 0$.

Rezolvare:

Se folosește formula $\boxed{\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}}$

$$\log_3 6 - \log_3 2 - \log_3 3 = \log_3 \frac{6}{2} - \log_3 3 = \log_3 3 - \log_3 3 = 0.$$

17. Arătați că numărul $A = \log_3 36 - \log_3 12 + 1$ este număr natural.

Rezolvare:

$$A = \log_3 36 - \log_3 12 + 1 = \log_3 \frac{36}{12} + 1 = \log_3 3 + 1 = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$$

18. Determinați partea reală a numărului complex $z = (1-i)(2i-3)$.

Rezolvare:

Fiind dat numărul complex $z = a + bi$, atunci $\boxed{\operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b}$

$$z = (1-i)(2i-3) = 1 \cdot (2i-3) - i \cdot (2i-3) = 2i-3-2i^2+3i = 2i-3-2 \cdot (-1)+3i = 2i-3+2+3i = -1+5i, \operatorname{Re} z = -1.$$

19. Calculați $\left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i-2}\right)^2$, unde $i^2 = -1$.

Rezolvare:

$$\left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i-2}\right)^2 = \left(\frac{i-2}{(i+2)(i-2)} - \frac{i+2}{(i+2)(i-2)}\right)^2 = \left[\frac{i-2-i-2}{(i+2)(i-2)}\right]^2 = \frac{-4}{i^2-2^2} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}.$$

20. Arătați că $P_2 - A_3^1 + C_5^2 = 9$

Rezolvare:

Se folosesc formulele $\boxed{P_n = n!, A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

$$P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$A_3^1 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{2! \cdot 3}{2!} = 3$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\Rightarrow P_2 - A_3^1 + C_5^2 = 2 - 3 + 10 = 9.$$

prof. Ciofu Constantin

SUBIECTUL I.2

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Arătați că $f(-1) + f(2) = 4$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1 \\ f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \end{array} \right| \Rightarrow f(-1) + f(2) = -1 + 5 = 4.$$

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - 5x$. Determinați numărul real x pentru care $f(a) = -1$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = 4 - 5a \\ f(a) = -1 \end{array} \right| \Rightarrow 4 - 5a = -1 \Rightarrow -5a = -1 - 4 \Rightarrow -5a = -5 \Rightarrow a = 1.$$

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x - 1$. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(-m; m+1)$ aparține graficului funcției f .

Rezolvare:

Se folosește $A(x, y) \in Gf \Leftrightarrow f(x) = y$

$$\left. \begin{array}{l} A(-m; m+1) \in Gf \Rightarrow f(-m) = m+1 \\ f(-m) = -2 \cdot (-m) - 1 = 2m - 1 \end{array} \right| \Rightarrow 2m - 1 = m + 1 \Rightarrow m = 2.$$

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - 4x$. Determinați numărul real a pentru care $3f(a) - 4f(-2) = -23$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = 3 - 4a \\ f(-2) = 3 - 4 \cdot (-2) = 3 + 8 = 11 \end{array} \right| \Rightarrow 3f(a) - 4f(-2) = 3(3 - 4a) - 4 \cdot 11 = 9 - 12a - 44 = -12a - 35$$
$$-12a - 35 = -23 \Rightarrow -12a = -23 + 35 \Rightarrow -12a = 12 \Rightarrow a = -1.$$

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) - f(2a - 1) = 4$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = 4a - 1 \\ f(2a - 1) = 4(2a - 1) - 1 = 8a - 5 \end{array} \right| \Rightarrow 4a - 1 - (8a - 5) = 3 \Rightarrow -4a + 4 = 4 \Rightarrow a = 0$$

6. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 6 - 5x$.

Rezolvare:

Pentru a determina coordonatele punctului de intersecție al celor două grafice se egalează cele expresii ale celor două funcții.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x - 2 = 6 - 5x \Rightarrow 3x + 5x = 6 + 2 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1$$

Pentru determinarea lui y se înlocuiește în oricare dintre cele două expresii a lui $f(x)$ și $g(x)$.

$$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow P(1; 1)$$

7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2$. Să se calculeze suma $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 - 2 \\ f(2) = 2 - 2 \\ \dots\dots\dots \\ f(10) = 10 - 2 \end{array} \right| \Rightarrow f(1) + f(2) + \dots + f(10) = (1 + 2 + \dots + 10) - \left(\underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{10 \text{ ori}} \right) = \frac{10 \cdot 11}{2} - 20 = 55 - 20 = 35.$$

8. Să se determine valoarea minimă a funcției $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 > 0 \Rightarrow f \text{ - strict crescătoare} \\ f(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 = -7 \\ f(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1 \end{array} \right| \Rightarrow \text{val}_{\min} = -7.$$

9. Determinați numărul real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - (3 - 2m)x$ este strict crescătoare.

Rezolvare:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ este strict crescătoare dacă $a > 0$

$$f(x) = 2 - (3 - 2m)x = \underbrace{(-3 + 2m)}_a x + 2$$

$$-3 + 2m > 0 \Rightarrow 2m > 3 \Rightarrow m > \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \left(\frac{3}{2}, +\infty \right).$$

10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - 3x$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) \leq 2f(-1) - x$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 4 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7 \\ f(x) \leq 2f(-1) - x \end{array} \right| \Rightarrow 4 - 3x \leq 2 \cdot 7 - x \Rightarrow -2x \leq 10 \cdot (-1) \Rightarrow 2x \geq -10 \Rightarrow x \geq -5 \Rightarrow x \in [-5, +\infty).$$

11. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a^2, a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} A(a^2, a) \in Gf \Leftrightarrow f(a^2) = a \\ f(a^2) = a^2 - 2 \end{array} \right| \Rightarrow a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0, \Delta = 9, a_1 = -1, a_2 = 2.$$

12. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x - m + 1, m \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real m pentru care $f(-1) = 2g(1)$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 3 = 2 - 3 = -1 \\ g(1) = 2 \cdot 1 - m + 1 = 3 - m \end{array} \right| \Rightarrow 3 - m = -1 \Rightarrow -m = -1 - 3 \Rightarrow -m = -4 \Rightarrow m = 4.$$

13. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + x - 1$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate.

Rezolvare:

Se folosesc $Gf \cap Ox : y = 0 \Rightarrow A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ și $Gf \cap Oy : x = 0 \Rightarrow C(0, y)$

$$Gf \cap Ox : y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0, \Delta = 9, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1 \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B(-1, 0)$$

$$Gf \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow C(0, 1).$$

14. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 2$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) = m$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(m) = m^2 - 2m + 2 \\ f(m) = m \end{array} \right| \Rightarrow m^2 - 2m + 2 = m \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0, \Delta = 1, m_1 = 1, m_2 = 2.$$

15. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .

Rezolvare:

Se folosesc $Gf \cap Ox : y = 0 \Rightarrow A(x_1, 0), B(x_2, 0)$

$$Gf \cap Ox : y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0, \Delta = 4, x_1 = 1, x_2 = 3.$$

16. Determinați numărul real m pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - mx + 1$ conține punctul $A(-1, 2)$.

Rezolvare:

Se folosește $A(x, y) \in Gf \Leftrightarrow f(x) = y$

$$\left. \begin{array}{l} A(-1, 2) \in Gf \Leftrightarrow f(-1) = 2 \\ f(-1) = (-1)^2 - m \cdot (-1) + 1 = 1 + m + 1 = m + 2 \end{array} \right| \Rightarrow m + 2 = 2 \Rightarrow m = 0.$$

17. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + mx - 1$ are abscisa egală cu $\frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Se folosește $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, abscisa $= -\frac{b}{2a}$, ordonata $= -\frac{\Delta}{4a}$ - reprezintă coordonatele vârfului parabolei asociate funcției f

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right| \Rightarrow -\frac{m}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -1.$$

18. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 9$. Să se calculeze produsul $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2026)$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ f(3) = 3^2 - 9 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2026) = 0.$$
Rezolvare:

Se folosește $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$\left. \begin{array}{l} (f \circ f)(-1) = f(f(-1)) \\ f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow (f \circ f)(-1) = f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4.$$

Rezolvare:

Se folosesc relațiile lui Viète $ax^2 + bx + c = 0, x_1, x_2 - \text{solutii} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

$$x^2 - 2x + m = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = m \end{array} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = 2 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2 \mid \cdot x_1 x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_1 \cdot x_2 \Rightarrow 2 = 2m \Rightarrow m = 1$$

SUBIECTUL I.3

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-3}=3$.

Rezolvare:

Impunem condiții de existență a radicalului

$$\text{C.E.: } 2x-3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației pentru a scăpa de radical.

$$\sqrt{2x-3}=3 \mid \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = 3^2 \Rightarrow 2x-3=9 \Rightarrow 2x=9+3 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$$

Verificare: $\sqrt{2 \cdot 6 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = 3$, (A).

În concluzie, $x=6$ este soluție a ecuației date.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-2}=x$.

Rezolvare:

$$\text{C.E.: } \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{3x-2}=x \mid \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{3x-2})^2 = x^2 \Rightarrow 3x-2=x^2 \Rightarrow x^2-3x+2=0, \Delta=1, x_1=1, x_2=2$$

Verificare: $x=1 \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2} = 1 \Leftrightarrow 1=1 \Rightarrow x=1$ soluție

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{6-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 \Rightarrow x=2 \text{ soluție.}$$

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-1}+1=x$.

Rezolvare:

Se folosește formula $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Rescriem ecuația dată $\sqrt{x^2-1}=x-1$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x^2-1 \geq 0, \Delta=4, x_1=-1, x_2=1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [1, +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-1}=x-1 \mid \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{x^2-1})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2-1 = x^2-2x+1 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

Verificare: $x=1 \Rightarrow \sqrt{1^2-1} = 1-1 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow x=1$ soluție

4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$.

Rezolvare:

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, 2]$$

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1 \mid \uparrow^2 \Rightarrow (\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x})^2 = 1^2 \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x} + (\sqrt{2-x})^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x} - 1 + 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 2 - \cancel{x} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 1 + 1 - 2 \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \Rightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \Big| \uparrow^2 \Rightarrow$$

$$(x-1)(2-x) = 0 \Rightarrow x-1=0 \text{ sau } 2-x=0 \Rightarrow x=1 \text{ sau } x=2$$

Verificare: $x=1 \Rightarrow \sqrt{1-1} + \sqrt{2-1} = 0+1=1$, (A) $\Rightarrow x=1$ soluție

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{2-1} + \sqrt{2-2} = 1+0=1, \text{ (A)} \Rightarrow x=2 \text{ soluție.}$$

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3x-7} = 16$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{3x-7} = 16 \\ 16 = 2^4 \end{array} \right| \Rightarrow 2^{3x-7} = 2^4 \Rightarrow 3x-7=4 \Rightarrow 3x=4+7 \Rightarrow 3x=11 \Rightarrow x = \frac{11}{3}.$$

6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{1-3x} = \frac{1}{25}$

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{1-3x} = \frac{1}{25} \\ \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2} \end{array} \right| \Rightarrow 5^{1-3x} = 5^{-2} \Rightarrow 1-3x = -2 \Rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = 1.$$

7. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $3^x \cdot \frac{1}{27} = 81$.

Rezolvare:

$$3^x \cdot \frac{1}{27} = 81 \Rightarrow 3^x \cdot 3^{-3} = 81 \Rightarrow 3^{x-3} = 3^4 \Rightarrow x-3=4 \Rightarrow x=7$$

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x-1} \cdot 25 = 1$.

Rezolvare:

$$5^{2x-1} \cdot 25 = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{2x-1} \cdot 5^2 = 5^{-1} \Rightarrow 5^{2x-1+2} = 5^{-1} \Rightarrow 5^{2x+1} = 5^{-1} \Rightarrow 2x+1 = -1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

9. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2-x-3} = \left(\frac{1}{81}\right)^{1-x}$

Rezolvare:

$$9^{x^2-x-3} = \left(\frac{1}{81}\right)^{1-x} \Rightarrow (3^2)^{x^2-x-3} = \left(\frac{1}{3^4}\right)^{1-x} \Rightarrow (3^2)^{x^2-x-3} = (3^4)^{1-x} \Rightarrow 3^{2(x^2-x-3)} = 3^{4(1-x)} \Rightarrow 2(x^2-x-3) = 4(1-x) \Rightarrow$$

$$2x^2 - 2x - 6 = 4 - 4x \Rightarrow 2x^2 + 2x - 10 = 0 \Big| :2 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0, \Delta = 21, x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{x+1} = 24$

Rezolvare:

$$2^x + 2^{x+1} = 24 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^1 = 24 \Rightarrow 2^x (1+2) = 24 \Rightarrow 2^x \cdot 3 = 24 \Big| :3 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 3^{x+2} = 56$.

Rezolvare:

$$3^x + 2 \cdot \frac{3^x}{3^1} + 3 \cdot 3^x \cdot 3^2 = 86 \Rightarrow 3^x \left(1 + \frac{2}{3} + 27 \right) = 86 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{3+2+81}{3} = 86 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{86}{3} = 86 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

12. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(5x-7) = 3$.

Rezolvare:

Condițiile de existență ce se impun asupra unui logaritm sunt:

$$\log_a x : \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{C.E.:} \begin{cases} 2 > 0, (A) \\ 2 \neq 1, (A) \\ 5x - 7 > 0 \Rightarrow 5x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\log_2(5x-7) = 3 \Leftrightarrow 5x-7 = 2^3 \Leftrightarrow 5x-7 = 8 \Leftrightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Verificare: } \log_2(5 \cdot 3 - 7) = \log_2(15 - 7) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

În concluzie, $x = 3$ este soluție a ecuației date.

13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2-x) = \log_2(x+4)$.

Rezolvare:

$$\text{C.E.:} \begin{cases} 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \\ x+4 > 0 \Rightarrow x > -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-4, 2)$$

$$\log_2(2-x) = \log_2(x+4) \Rightarrow 2-x = x+4 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Verificare: } x = -1 \Rightarrow \log_2(2 - (-1)) = \log_2(-1+4) \Leftrightarrow \log_2 3 = \log_2 3 \Rightarrow x = -1 \text{ soluție.}$$

14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_2(x-3) = \log_2 4$.

Rezolvare:

Se folosește formula $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

$$\text{C.E.:} \begin{cases} x > 0 \\ x-4 > 0 \Rightarrow x > 4 \end{cases} \Rightarrow x > 4$$

$$\log_2 x + \log_2(x-3) = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 x(x-3) = \log_2 4 \Rightarrow x(x-3) = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0, \Delta = 25, x_1 = -1, x_2 = 4$$

Verificare: $x = -1, (F)$

$$x = 4 \Rightarrow \log_2 4 + \log_2(4-3) = \log_2 4 \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 1 = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 4 = \log_2 4 \Rightarrow x = 4 \text{ soluție.}$$

0

15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_{\frac{1}{2}}(x-7) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) = 2$.

Rezolvare:

Se folosește formula $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x-7 > 0 \Rightarrow x > 7 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases} \Rightarrow x > 7$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-7) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-7}{x+2} = 2 \Rightarrow \frac{x-7}{x+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x-7}{x+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(x-7) = x+2 \Rightarrow 4x-28 = x+2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x-x = 28+2 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{Verificare: } x = 10 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(10-7) - \log_{\frac{1}{2}}(10+2) = \log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{12} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 10$$

soluție.

16. Rezolvați ecuația $(n+2)! = 3(n+1)!$.

Rezolvare:

Se folosește formula $n! = (n-1)! \cdot n$

$$(n+2)! = 3(n+1)! \Rightarrow \cancel{(n+1)!} (n+2) = 3 \cancel{(n+1)!} \Rightarrow n+2 = 3 \Rightarrow n = 1.$$

17. Să se rezolve ecuația $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 6$.

Rezolvare:

Se folosește formula $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

$$\frac{P_{n+2}}{P_n} = 6 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{n!} = 6 \Rightarrow \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{\cancel{n!}} = 6 \Rightarrow (n+1) \cdot (n+2) = 6 \Rightarrow n^2 + 3n + 2 = 6 \Rightarrow n^2 + 3n - 4 = 0, \Delta = 25, n_1 = 1 \text{ și}$$

$$n_2 = -4 \notin \mathbb{N}.$$

18. Să se rezolve ecuația $A_n^3 = 3(n-1)$.

Rezolvare:

Se folosește formula $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Impunem condiția de existență C.E.: $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

$$A_n^3 = 3(n-1) \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 3(n-1) \Rightarrow \frac{\cancel{(n-3)!} (n-2)(n-1)n}{\cancel{(n-3)!}} = 3(n-1) \Rightarrow (n-2)(\cancel{n-1})n = 3(\cancel{n-1}) \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 16, n_1 = -1 \notin \mathbb{N}, n_2 = 3 \in \mathbb{N}.$$

19. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 6$.

Rezolvare:

Se folosește formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Impunem condiția de existență C.E.: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$C_n^2 = 6 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{\cancel{(n-2)}(n-1)n}{2\cancel{(n-2)}!} = 6 \Rightarrow \frac{(n-1)n}{2} = 6 \Rightarrow n^2 - n = 12 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0, \Delta = 49, n_1 = -3 \notin \mathbb{N}, n_2 = 4.$$

prof. Clotiu Constantin

SUBIECTUL I.4

1. Un obiect costă 350 lei. Care este prețul obiectului după o scumpire cu 20%?

Rezolvare:

$$\text{Scumpirea: } 20\% \cdot 350 = \frac{20}{100} \cdot 350 = 70 \text{ lei}$$

$$\text{Prețul după scumpire: } 350 + 70 = 420 \text{ lei.}$$

2. Un produs costă 500 lei. Care este prețul produsului după o ieftinire cu 15%?

Rezolvare:

$$\text{Ieftinirea: } 15\% \cdot 500 = \frac{15}{100} \cdot 500 = 75 \text{ lei}$$

$$\text{Prețul după ieftinire: } 500 - 75 = 425 \text{ lei.}$$

3. După o reducere cu 15% un obiect costă 340 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

Rezolvare:

Metoda 1

Se folosește formula $P_f = P_i \left(1 - \frac{p}{100}\right)$, unde P_f reprezintă prețul după reducere, P_i reprezintă prețul inițial și p reprezintă procentul de reducere.

$$340 = P_i \left(1 - \frac{15}{100}\right) \Rightarrow 340 = P_i \left(\frac{100}{100} - \frac{15}{100}\right) \Rightarrow 340 = \frac{85}{100} P_i \Rightarrow P_i = \frac{340 \cdot 100}{85} \Rightarrow P_i = 400 \text{ lei}$$

Metoda 2

Notăm prețul inițial cu x

$$x - 15\% \cdot x = 340 \Rightarrow x - \frac{15x}{100} = 340 \mid \cdot 100 \Rightarrow 100x - 15x = 34000 \Rightarrow 85x = 34000 \Rightarrow x = \frac{34000}{85} \Rightarrow x = 400 \text{ lei.}$$

4. După o scumpire cu 30% un obiect costă 390 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

Rezolvare:

Metoda 1

Se folosește formula $P_f = P_i \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, unde P_f reprezintă prețul după scumpire, P_i reprezintă prețul inițial și p reprezintă procentul de scumpire.

$$390 = P_i \left(1 + \frac{30}{100}\right) \Rightarrow 390 = P_i \left(\frac{100}{100} + \frac{30}{100}\right) \Rightarrow 390 = \frac{130}{100} P_i \Rightarrow P_i = \frac{390 \cdot 100}{130} \Rightarrow P_i = 300 \text{ lei}$$

Metoda 2

Notăm prețul inițial cu x

$$x + 30\% \cdot x = 390 \Rightarrow x + \frac{30x}{100} = 390 \mid \cdot 100 \Rightarrow 100x + 30x = 39000 \Rightarrow 130x = 39000 \Rightarrow x = \frac{39000}{130} \Rightarrow x = 300 \text{ lei.}$$

5. Prețul unui obiect este de 600 de lei. Determinați prețul obiectului după două scumpiri succesive, cu 20%, respectiv cu 15%.

Rezolvare:

$$\text{prima scumpire : } 20\% \cdot 600 = \frac{20 \cdot 600}{100} = 120 \text{ lei}$$

$$\text{prețul după prima scumpire : } 600 + 120 = 720 \text{ lei}$$

$$\text{a doua scumpire : } 15\% \cdot 720 = \frac{15}{100} \cdot 720 = 108 \text{ lei}$$

$$\text{prețul după a doua scumpire : } 720 + 108 = 828 \text{ lei.}$$

6. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 9.

Rezolvare:

$$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

cazuri posibile : 10, 11, 12, ..., 99, adică $(99 - 10) + 1 = 90$ numere;

cazuri favorabile : $\overline{ab} \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90$, adică 9 numere;

$$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}.$$

7. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ acesta să verifice inegalitatea $2n + 1 \leq 7$.

Rezolvare:

$$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

cazuri posibile : 6 numere;

Pentru a determina cazurile favorabile, se rezolvă inecuația dată.

$$2n + 1 \leq 7 \Rightarrow 2n \leq 7 - 1 \Rightarrow 2n \leq 6 \Rightarrow n \leq 3 \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 3\}$$

cazuri favorabile : 4 numere;

$$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

8. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.

Rezolvare:

$$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

n.c.p : $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ - în total $(99 - 10) + 1 = 90$ numere

$$\left. \begin{array}{l} \overline{ab} : a - \text{par} \Rightarrow a \in \{2, 4, 6, 8\} \\ b - \text{impar} \Rightarrow b \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{ab} \text{ poate lua } 4 \cdot 5 = 20 \text{ de valori.}$$

$$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}.$$

9. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 2 mai mare decât cifra unităților.

Rezolvare:

$$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

n.c.p: $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ - în total $(99 - 10) + 1 = 90$ numere

$\overline{ab}$; $a = b + 2$; $b \in \{0, 1, 2, \dots, 7\} \Rightarrow a \in \{2, 3, 4, \dots, 9\} \Rightarrow 8$ numere

$$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{90} = \frac{2}{45}.$$

10. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 25.

Rezolvare:

$$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

n.c.p: $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ - în total $(99 - 10) + 1 = 90$ numere

$$\text{multiplu de } 25 \Rightarrow 25 \cdot 1, 25 \cdot 2, 25 \cdot 3 \Rightarrow 3 \text{ numere} \Rightarrow p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$$

11. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rezolvare:

$\overline{ab}$; $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow a$ se poate alege în 5 moduri; $b \in \{1, 3, 5\} \Rightarrow b$ se poate alege în 3 moduri.

Concluzie: $5 \cdot 3 = 15$ numere.

12. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 15 submulțimi cu două elemente.

Rezolvare:

Notăm cu n numărul de elemente al mulțimii.

$$C_n^2 = 15 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 15 \Rightarrow \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!} = 15 \Rightarrow \frac{(n-1)n}{2} = 15 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$\sqrt{\Delta} = 11 \Rightarrow n_1 = -5 \notin \mathbb{N}, n_2 = 6 \in \mathbb{N}$. În concluzie, mulțimea dată are 6 elemente.

SUBIECTUL I.5

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(0,-1)$ și $C(a,2)$. Determinați numărul real a pentru care $AC = AB$.

Rezolvare:

Se folosește formula $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+2a+a^2+9} = \sqrt{a^2+2a+10} \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow a^2+2a+10=5 \Rightarrow \right.$$
$$\Rightarrow a^2+2a+5=0, \Delta = -16 < 0 \Rightarrow \nexists a \in \mathbb{R} \text{ a.î. } AB = AC.$$

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(5,6)$ și $C(6,2)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

Rezolvare:

$$\Delta ABC - \text{isoscel} \Leftrightarrow AB = AC \text{ sau } AB = BC \text{ sau } AC = BC$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5-6)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \\ AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17} \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow BC = AC \Leftrightarrow \Delta ABC - \text{isoscel} . \right.$$

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2a)$ și $B(5,5a)$. Determinați numărul real a , știind că lungimea segmentului AB este egală cu 7.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + (2a-5a)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-3a)^2} = \sqrt{49+9a^2} \\ AB &= 7 \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow \sqrt{49+9a^2} = 7 \right| \uparrow^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 49+9a^2 = 49 \Rightarrow 9a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(6,8)$. Arătați că $OA = AB$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3-6)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow OA = AB \right.$$

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Arătați că perimetrul ΔAOB este egal cu 12.

Rezolvare:

$$P_{\Delta AOB} = AO + OB + BA$$

$$\left. \begin{aligned} AO &= \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ OB &= \sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16} = 4 \\ BA &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned} \right| \Rightarrow P_{\triangle AOB} = 3 + 4 + 5 = 12.$$

6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$ și $B(-5,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .

Rezolvare:

$$M - \text{mijloc } AB \Rightarrow M \left(x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$\text{Fie } M - \text{mijloc } AB \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned} \right. \Rightarrow M(-2, 4).$$

7. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-3)$, $B(-4,5)$ și $M(a,b)$. Determinați numerele reale a și b astfel încât M să fie mijlocul segmentului AB .

Rezolvare:

$$M - \text{mijloc } AB \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow a = \frac{2 + (-4)}{2} \Rightarrow a = \frac{2-4}{2} \Rightarrow a = \frac{-2}{2} \Rightarrow a = -1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow b = \frac{-3 + 5}{2} \Rightarrow b = \frac{2}{2} \Rightarrow b = 1 \end{aligned} \right.$$

8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(2,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC .

Rezolvare:

$$\text{Fie } M - \text{mijloc } AB \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned} \right. \Rightarrow M(1, -1)$$

$$\left. \begin{aligned} C(2,2) \\ M(1,-1) \end{aligned} \right| \Rightarrow CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

9. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(3,1)$ și $C(2,m)$. Determinați numărul real m pentru care punctul C aparține dreptei AB .

Rezolvare:

$$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ - reprezintă ecuația dreptei prin punctele } A \text{ și } B.$$

$$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (AB): 2x - 1 + 3y - (6 + x - y) = 0 \Leftrightarrow (AB): x + 4y - 7 = 0$$

$$C \in (AB) \Leftrightarrow x_C + 4y_C - 7 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4m - 7 = 0 \Leftrightarrow 4m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$$

10. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -3)$, $B(-2, 1)$ și $C(-2, -1)$. Calculați aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - \text{reprezintă aria triunghiului ABC.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - (-2 - 1 + 6) = 9 - 3 = 6 \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\Delta| = \frac{1}{2} \cdot |6| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$, $B(-1, 2)$ și $C(m, -1)$. Determinați numărul real m pentru care punctele A, B și C să fie coliniare.

Rezolvare:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ reprezintă condiția de coliniaritate a punctelor A, B și C}$$

$$A-B-C \text{ coliniare} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + m - (2m - 1) = 0 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2.$$

12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 4)$ și $B(-3, 0)$. Calculați panta dreptei AB.

Rezolvare:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ panta unei drepte AB}$$

$$\left. \begin{matrix} A(1, 4) \\ B(-3, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 4}{-3 - 1} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 3)$, $B(3, -2)$ și $C(0, 2m)$. Determinați numărul real m, știind că dreptele AO și BC sunt paralele.

Rezolvare:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ condiția de paralelism a două drepte.}$$

$$\left. \begin{matrix} AO \parallel BC \Leftrightarrow m_{AO} = m_{BC} \\ m_{AO} = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{0 - 3}{0 + 2} = -\frac{3}{2} \\ m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2m + 2}{0 - 3} = -\frac{2m + 2}{3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{2m + 2}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2m + 2}{3} \Rightarrow 2m + 2 = 3 \Rightarrow 2m = 3 - 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

14. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, -4), B(-1, -1)$ și $C(1-m, m)$. Determinați numărul real m , știind că dreptele AO și BC sunt perpendiculare.

Rezolvare:

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1} \text{ condiția de paralelism a două drepte.}$$

$$\left. \begin{aligned} AO \perp BC &\Leftrightarrow m_{AO} \cdot m_{BC} = -1 \\ m_{AO} &= \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{0 + 4}{0 - 3} = -\frac{4}{3} \\ m_{BC} &= \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{m + 1}{1 - m + 1} = \frac{m + 1}{2 - m} \end{aligned} \right| \Rightarrow -\frac{4}{3} \cdot \frac{m + 1}{2 - m} = -1 \Rightarrow \frac{-4m - 4}{6 - 3m} = -1 \Rightarrow -4m - 4 = -6 + 3m \Rightarrow -7m = -2 \Rightarrow m = \frac{2}{7}$$

12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -1), B(-2, 3)$ și $C(a, 1)$. Să se determine numărul real a pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Rezolvare:

$$\triangle ABC - \text{dreptunghic în } A \Leftrightarrow BA \perp CA \Leftrightarrow m_{BA} \cdot m_{CA} = -1$$

$$\left. \begin{aligned} m_{BA} &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - 3}{1 + 2} = -\frac{4}{3} \\ m_{CA} &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-1 - 1}{1 - a} = \frac{-2}{1 - a} \end{aligned} \right| \Rightarrow -\frac{4}{3} \cdot \frac{-2}{1 - a} = -1 \Rightarrow \frac{8}{3 - 3a} = -1 \Rightarrow 3a - 3 = 8 \Rightarrow 3a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{3}$$

13. În triunghiul dreptunghic ABC, $mB = 90^\circ$, $AB = 6$ și măsura unghiului A este egală cu 60° . Calculați lungimea ipotenuzei triunghiului ABC.

Rezolvare:

Într-un triunghi dreptunghic, latura care se opune unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.

$$mA + mB + mC = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 90^\circ + mC = 180^\circ \Rightarrow mC = 30^\circ \xrightarrow{T 30^\circ} AB = \frac{\text{ipotenuza}}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \cdot AB \Rightarrow AC = 12$$

14. Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului B de 30° și $BC = 12$. Calculați lungimea înălțimii dusă din punctul A.

Rezolvare:

$$\boxed{h_{\triangle \text{ dreptunghic}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{i}}$$

$$mB = 30^\circ \xrightarrow{T 30^\circ} AC = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\triangle ABC : mA = 90^\circ \xrightarrow{T.P.} BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 144 = AB^2 + 36 \Rightarrow AB^2 = 144 - 36 \Rightarrow AB^2 = 108 \Rightarrow AB = \sqrt{108} \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$$

$$\boxed{h_{\triangle ABC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{i} = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{12} = \frac{36\sqrt{3}}{12} = 3\sqrt{3}}$$

1. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 8$ și $BC = 6$. Calculați $\cos A$.
2. Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 60^\circ$ și $AB = 12$.
3. Arătați că $\cos 60^\circ \cdot (5 \sin 30^\circ - \sin 150^\circ) = 1$.
4. Determinați numărul real a , pentru care vectorii $\vec{v}_1 = (a-1)\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ să fie perpendiculari.
5. În triunghiul ABC dreptunghic în A, $BC = 8$ și $B = \frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului ABC este $8\sqrt{3}$.
9. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(1,0)$. Determinați ecuația medianei din C a triunghiului ABC.

Indicație:

$$\text{Fie } M - \text{mijlocul lui } AB \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ și } \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \Rightarrow M(1, -1).$$

$$\begin{aligned} (\text{CM}): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (\text{CM}): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\text{CM}): (0-1+y) - (0-x+y) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\text{CM}): x-1=0 \end{aligned}$$

$$23. \text{ Se consideră expresia } E(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}, \text{ unde } x \text{ este număr real. Arătați că } E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

$$31. \text{ Arătați că } (\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right), \text{ pentru orice număr real } x.$$

33. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$, $B(a,1)$ și $C(-2,b)$. Determinați numerele reale a și b , știind că A este mijlocul segmentului BC.

34. În triunghiul ABC, cunoaștem $AB = AC = 15$ și $BC = 24$. Arătați că $AD = 9$, unde AD este înălțimea din punctul A în triunghiul ABC.

$$39. \text{ Știind că } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } \sin x = \frac{2}{3}, \text{ să se calculeze } \cos x.$$

$$40. \text{ Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu } AB = 3 \text{ și } BC = 2\sqrt{3}. \text{ Arătați că } \cos C = \frac{1}{2}.$$