

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Calculați z^2 .
- 5p 2. Arătați că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$ **nu** intersectează axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x - 3) = \log_2(x + 1)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.
- 5p 5. În triunghiul ABC punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, AC . Arătați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.
- 5p 6. Știind că $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$ și $a \in \mathbb{R}$, arătați că $\frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = 2 - \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -1$.
- 5p b) Determinați numerele reale m știind că $\det(A(m)) = 0$.
- 5p c) Determinați numerele reale a astfel încât $A(a) \cdot A(a) - A(a^2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3x + 3y - xy - 6$.
- 5p a) Calculați $1 * 3$.
- 5p b) Arătați că $x * y = 3 - (x - 3)(y - 3)$ pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x * x * \dots * x}_{x \text{ de } 2014 \text{ ori}} = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(1 - x)(x - 3)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^e x \ln^n x \, dx$.
- 5p a) Arătați că $I_1 = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- 5p b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Demonstrați că $2I_{n+1} + (n + 1)I_n = e^2$ pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Variantă 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 =$ $= 2i$	2p 3p
2.	$\Delta = 16 - 24 = -8$ $\Delta < 0$, deci parabola asociată funcției f nu intersectează axa Ox	3p 2p
3.	$2x - 3 = x + 1$ $x = 4$ care verifică ecuația	2p 3p
4.	Sunt 45 de numere impare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} =$ $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$	2p 3p
6.	$\frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = \frac{\cos a \left(\frac{\sin a}{\cos a} - 1 \right)}{\cos a \left(1 + \frac{\sin a}{\cos a} \right)} = \frac{\operatorname{tga} - 1}{1 + \operatorname{tga}} =$ $= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 2 + 2 - 1 - 4 - 1 = -1$	2p 3p
b)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2m$ $m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0 \text{ și } m_2 = 2$	3p 2p
c)	$A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a+3 & a+3 \\ a+3 & a^2+5 & 4a+1 \\ a+3 & 4a+1 & a^2+5 \end{pmatrix}, A(a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 2 \\ 1 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & a+2 & a+2 \\ a+2 & 5 & 4a-1 \\ a+2 & 4a-1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = -1$	3p 2p

2.a)	$1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 6 =$ $= 3$	3p 2p
b)	$x * y = 3 - xy + 3x + 3y - 9 =$ $= 3 - x(y - 3) + 3(y - 3) = 3 - (x - 3)(y - 3)$ pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$3 - (x - 3)^{2014} = x$ $x_1 = 3$ și $x_2 = 2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x-2)'(x^2-4x+5) - (x-2)(x^2-4x+5)'}{(x^2-4x+5)^2} =$ $= \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+5} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 3$ $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [1, 3] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, 3]$ $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3, +\infty)$	2p 1p 1p 1p
2.a)	$I_1 = \int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$	3p 2p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x(\ln x - 1) \ln^n x \, dx$ Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [1, e]$ avem $\ln x \geq 0$ și $\ln x - 1 \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$	2p 3p
c)	$I_{n+1} = \int_1^e x \ln^{n+1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln^{n+1} x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} (n+1) \ln^n x \, dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} \int_1^e x \ln^n x \, dx \Rightarrow 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$ pentru orice număr natural nenul n	3p 2p