

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ cu termeni reali, știind că $b_1 = 1$ și $b_4 = 27$.
- 5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} = 9^{1-x}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
- 5p 6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $BC = 5$ și $\sin C = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det(A(1))$.
- 5p b) Determinați numerele reale m știind că $A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(101)) = -51^2 \cdot 101^3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.
- 5p a) Calculați $3 \circ 4$.
- 5p b) Arătați că $x \circ y = (x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x + e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x + e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \geq \frac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} dx$.
- 5p a) Calculați I_0 .
- 5p b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural n .
- 5p c) Demonstrați că $I_n = \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right)$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow q^3 = 27$ $q = 3$	3p 2p
2.	$x_V = 3$ $y_V = -1$	2p 3p
3.	$3^{x+2} = 3^{2(1-x)} \Rightarrow x + 2 = 2 - 2x$ $x = 0$	3p 2p
4.	Numerele de două cifre, pătrate perfecte, sunt 16, 25, 36, 49, 64 și 81 $\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{15}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ $AC = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ $\sin A = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1$	2p 3p
b)	$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1$	3p 2p
c)	$A(1) + A(2) + \dots + A(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{pmatrix}$ $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(101)) = \begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{vmatrix} = -51^2 \cdot 101^3$	3p 2p

2.a)	$3 \circ 4 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 4 + 20 =$ $= 4$	3p 2p
b)	$x \circ y = x(y - 4) - 4(y - 4) + 4 =$ $= (x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$x \circ x = (x - 4)^2 + 4$ $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = (x - 4)^{2013} + 4$ $(x - 4)^{2013} + 4 = 5 \Rightarrow x = 5$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{e^x(x + e^x) - e^x(1 + e^x)}{(x + e^x)^2} =$ $= \frac{(x - 1)e^x}{(x + e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x + e^x} = 1$ Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = 1$	3p 2p
c)	$f'(1) = 0$; $f'(x) \leq 0$, pentru $x \in (0, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru $x \in [1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq \frac{e}{e + 1}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$I_0 = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} (e^{-x^2} - 1) dx$ Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, 1]$ avem $e^{-nx^2} > 0$ și $e^{-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$	2p 3p
c)	Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2n} \int_0^1 (e^{-nx^2})' dx =$ $= -\frac{1}{2n} e^{-nx^2} \Big _0^1 = \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$	3p 2p