

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real x pentru care numerele 1, $2x+2$ și 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 4} = x + 2$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma, știind că $a, b \in \{2, 3, 4, 5\}$ și $a \neq b$.
- 5p 5. În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=8$ și $BC=6$, se consideră vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD}$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}$.
- 5p 6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=6$, $BC=10$ și $\sin C = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det(A(0))$.
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $5A(a) - (A(a))^2 = 4I_3$.
- 5p c) Determinați inversa matricei $A(2)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 3X - 1$, unde m este număr real.
- 5p a) Calculați $f(2) - f(-2)$.
- 5p b) Determinați restul împărțirii lui f la $X+2$, știind că restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 9.
- 5p c) Determinați numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.
- 5p a) Calculați $f'(x)$, $x \in (-1,1)$.
- 5p b) Verificați dacă funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.
- 5p c) Determinați punctele de inflexiune a funcției f .
2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$.
- 5p a) Calculați I_0 .
- 5p b) Arătați că $I_1 = e^2$.
- 5p c) Demonstrați că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2 - e$, pentru orice număr natural n .

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2x + 2 = \frac{1+7}{2}$ $x = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ sau $x = 3$ Distanța este egală cu 2	3p 2p
3.	$x^2 + 4 = x^2 + 4x + 4$ Rezultă $x = 0$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	b impar $\Rightarrow b \in \{3, 5\} \Rightarrow$ sunt două variante de alegere a lui b Pentru fiecare b impar sunt trei variante de alegere a lui a Se pot forma $2 \cdot 3 = 6$ numere	2p 2p 1p
5.	$\vec{v} = \vec{AC} + \vec{AO} = 3\vec{AO}$ $ \vec{v} = 15$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ $\sin A = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$(A(a))^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2 & 2a + 1 & 2a + 1 \\ 2a + 1 & a^2 + 2 & 2a + 1 \\ 2a + 1 & 2a + 1 & a^2 + 2 \end{pmatrix}$ $5A(a) - (A(a))^2 = \begin{pmatrix} 5a - a^2 - 2 & 4 - 2a & 4 - 2a \\ 4 - 2a & 5a - a^2 - 2 & 4 - 2a \\ 4 - 2a & 4 - 2a & 5a - a^2 - 2 \end{pmatrix}$ $5A(a) - (A(a))^2 = 4I_3 \Rightarrow 5a - a^2 - 2 = 4$ și $4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$	2p 1p 2p
c)	$A(2) \cdot (5I_3 - A(2)) = 4I_3$ și $(5I_3 - A(2)) \cdot A(2) = 4I_3$ Matricea $A(2)$ este inversabilă și inversa ei este $B = \frac{1}{4}(5I_3 - A(2)) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	2p 3p

2.a)	$f(2) = 8 - 4m + 6 - 1 = -4m + 13$	2p
	$f(-2) = -8 - 4m - 6 - 1 = -4m - 15 \Rightarrow f(2) - f(-2) = 28$	3p
b)	Restul împărțirii lui f la $X - 2$ este $f(2) \Rightarrow f(2) = 9$	2p
	Restul împărțirii lui f la $X + 2$ este $f(-2) \Rightarrow f(-2) = -19$	3p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = m, x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 3 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2 - 6$	2p
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = m^3 - 9m + 3$	2p
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 \Leftrightarrow m^3 - 9m = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ sau } m = 0 \text{ sau } m = 3$	1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' =$	3p
	$= -\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{x^2-1}, \text{ pentru orice } x \in (-1,1)$	2p
b)	$x^2 - 1 < 0, \text{ pentru orice } x \in (-1,1)$	2p
	$f'(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (-1,1) \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (-1,1)$	3p
c)	$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, \text{ pentru orice } x \in (-1,1)$	2p
	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	1p
	$f''(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in (-1,0], f''(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in [0,1), \text{ deci punctul de inflexiune este } x = 0$	2p
2.a)	$I_0 = \int_1^2 e^x dx =$	2p
	$= e^x \Big _1^2 = e^2 - e$	3p
b)	$I_1 = \int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big _1^2 - \int_1^2 e^x dx =$	3p
	$= e^2$	2p
c)	$I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1} e^x dx = \int_1^2 x^{n+1} (e^x)' dx =$	2p
	$= x^{n+1} e^x \Big _1^2 - (n+1) I_n \Rightarrow I_{n+1} + (n+1) I_n = 2^{n+1} e^2 - e$	3p