

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(\sqrt{2} - 3)^2 + (\sqrt{2} + 3)^2 = 22$.
- 5p 2. Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 6x + 6) = \log_3 1$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 0)$ și $B(1, 2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p 6. Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 + x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real a , $a \neq -1$, știind că $A\left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdots A\left(\frac{1}{2016 \cdot 2017}\right) = A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real m , știind că $f(1) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 0$, pentru orice număr real m , unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Pentru $m = 3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , $a \in (-1, 1)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x - 1)$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x} dx = 0$.

- 5p** | **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria egală cu e .
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{2}-3)^2 = 11-6\sqrt{2}$	2p
	$(\sqrt{2}+3)^2 = 11+6\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}-3)^2 + (\sqrt{2}+3)^2 = 11-6\sqrt{2} + 11+6\sqrt{2} = 22$	3p
2.	$f(-1) = 0$	3p
	$f(-1)f(0)f(1) = 0$	2p
3.	$x^2 - 6x + 6 = 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$	2p
	$x = 1$ sau $x = 5$, care verifică ecuația dată	3p
4.	Cifra unităților este 8	2p
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ astfel de numere	3p
5.	$m_{AB} = 1$ și $m_d = m_{AB} \Rightarrow m_d = 1$	3p
	Ecuația dreptei d este $y = x$	2p
6.	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(3\pi - \frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(3\pi - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$	3p
	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$, pentru orice număr real x	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & y^2+y \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y+x & y^2+y+2xy+x^2+x \\ 0 & 1 & 2y+2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$	3p
	$= \begin{pmatrix} 1 & x+y & (x+y)^2+(x+y) \\ 0 & 1 & 2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	2p
c)	$A\left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdots A\left(\frac{1}{2016 \cdot 2017}\right) = A\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}\right) =$	3p
	$= A\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right) = A\left(\frac{2016}{2017}\right)$ $A\left(\frac{2016}{2017}\right) = A\left(\frac{a}{a+1}\right) \Leftrightarrow a = 2016$	2p

2.a)	$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^4 + m \cdot 1^2 + 2 = 0$ $m = -3$	2p 3p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 0$, pentru orice număr real m	2p 3p
c)	$f = X^4 + 3X^2 + 2 = (X^2 + 1)(X^2 + 2)$ Polinoamele $X^2 + 1$ și $X^2 + 2$ au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale, deci sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X]$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$ $= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(0) = 0, f'(0) = 1$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = x$	2p 3p
c)	$f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a \in (-1, 1)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x} dx = \int_0^2 e^x(x-1)e^{-x} dx = \int_0^2 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big _0^2 =$ $= \frac{4}{2} - 2 = 0$	3p 2p
b)	$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-1)e^x dx = (x-2)e^x \Big _1^2 =$ $= 0 - (-1)e = e$	3p 2p
c)	$\int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = \int_{-n}^1 x e^x dx = (x-1)e^x \Big _{-n}^1 = (n+1)e^{-n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^n} = 0$	3p 2p