

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real a , știind că numerele 24, 1020 și a sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Determinați numărul real m , știind că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$ este tangentă axei Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} = 27$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{25}\}$, acesta să fie număr rațional.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$, $B(-2, -1)$ și $C(2, 3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta BC .
- 5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC , în care $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ și $BC = 2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - az = -4 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p b) Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a , $a \neq -1$ și $a \neq \frac{1}{3}$.
- 5p c) Determinați numerele reale a , pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , iar $x_0 = y_0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$.
- 5p a) Arătați că $x * y = 2 - (x - 2)(y - 2)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x , pentru care $x * x = 1$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă m , n și p sunt numere întregi astfel încât $m * n * p = 2$, atunci produsul numerelor m , n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \ln x + 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică în intervalul $(0, 1)$.

2. Pentru fiecare număr natural n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$.

5p a) Arătați că $I_0 = 1 + 3\ln \frac{3}{4}$.

5p b) Demonstrați că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n .

5p c) Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$24 + a = 2 \cdot 1020$ $a = 2016$	3p 2p
2.	$\Delta = 16 - 4m$ $16 - 4m = 0 \Rightarrow m = 4$	3p 2p
3.	$(3^{-1})^{2x-3} = 3^3 \Leftrightarrow -2x + 3 = 3$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 25 de elemente, deci sunt 25 de cazuri posibile Sunt 5 numere raționale în mulțimea A , deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$	1p 2p 2p
5.	$d \perp BC \Rightarrow m_d \cdot m_{BC} = -1$ și, cum $m_{BC} = 1$, obținem $m_d = -1$ Deoarece $A \in d$, ecuația dreptei d este $y - y_A = m_d(x - x_A)$, adică $y = -x + 1$	2p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$ $= 2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (3a-1)(a+1)$ Pentru orice număr real a , $a \neq -1$ și $a \neq \frac{1}{3}$, obținem $\det(A(a)) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	2p 3p
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq \frac{1}{3}$; pentru fiecare număr real a , $a \neq -1$ și $a \neq \frac{1}{3}$, obținem $x_0 = \frac{-4a}{(3a-1)(a+1)}$ și $y_0 = \frac{2(2-3a)}{3a-1}$ Cum $x_0 = y_0 \Leftrightarrow 3a^2 - a - 2 = 0$, obținem $a = -\frac{2}{3}$ sau $a = 1$	2p 3p

2.a)	$x * y = -xy + 2x + 2y - 4 + 2 =$ $= -x(y - 2) + 2(y - 2) + 2 = 2 - (x - 2)(y - 2)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$x * x = 2 - (x - 2)^2$ $2 - (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 3$	2p 3p
c)	Cum $m * n * p = 2 + (m - 2)(n - 2)(p - 2)$, obținem $(m - 2)(n - 2)(p - 2) = 0$ $m = 2$ sau $n = 2$ sau $p = 2$, deci produsul numerelor m , n și p este divizibil cu 2	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (e^x)' + (\ln x)' + 1' =$ $= e^x + \frac{1}{x} + 0 = e^x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	2p 3p
b)	$f(1) = e + 1$, $f'(1) = e + 1$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = (e + 1)x$	2p 3p
c)	$f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^x + \ln x + 1) = -\infty$, $f(1) > 0$ și f este continuă, atunci ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică în intervalul $(0, 1)$	2p 3p
2.a)	$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x+3} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x+3}\right) dx = \left(x - 3\ln(x+3)\right) \Big _0^1 =$ $= 1 - 3\ln 4 + 3\ln 3 = 1 + 3\ln \frac{3}{4}$	3p 2p
b)	$I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 3x^{n+1}}{x+3} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x+3)}{x+3} dx = \int_0^1 x^{n+1} dx =$ $= \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big _0^1 = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n	3p 2p
c)	$nI_n = n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx = \int_0^1 (x^n)' \cdot \frac{x^2}{x+3} dx = x^n \cdot \frac{x^2}{x+3} \Big _0^1 - \int_0^1 x^n \cdot \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} dx = \frac{1}{4} - \int_0^1 x^n \left(1 - \frac{9}{(x+3)^2}\right) dx$ pentru orice număr natural nenul n Cum $0 \leq \int_0^1 x^n \left(1 - \frac{9}{(x+3)^2}\right) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n , obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$	2p 3p