

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $n = (\sqrt{5} - 1)^2 + 2\sqrt{5}$ este natural.
- 5p** 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2 - x^2) = \log_2 x$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.
- 5p** 5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.
- 5p** 6. Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a + b = \frac{\pi}{3}$. Arătați că $2 \cos b = \cos a + \sqrt{3} \sin a$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se notează cu $D(x, y)$ determinantul matricei $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Calculați $D(-1, 2)$.
- 5p** b) Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2, q)$ are rangul egal cu 2.
- 5p** c) Arătați că există cel puțin o pereche (x, y) de numere reale, cu $x \neq y$, pentru care $D(x, y) = D(y, x)$.
2. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + X - m$, unde m este un număr real.
- 5p** a) Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X - 1$ să fie egal cu 8.
- 5p** b) Arătați că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) În cazul $m = 2$ determinați patru numere întregi a, b, c, d , cu $a > 0$, astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
- 5p** a) Calculați $f'(0)$.
- 5p** b) Arătați că, pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, ecuația $f(x) = n$ are exact o soluție în intervalul $(0, +\infty)$.
- 5p** c) Fie x_n unica soluție din intervalul $(0, +\infty)$ a ecuației $f(x) = n$, unde n este număr natural, $n \geq 2$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$.
- 5p** a) Calculați aria suprafeței S .
- 5p** b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox .
- 5p** c) Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^n(kx) dx = \int_0^{2\pi} f^n(x) dx$, pentru orice numere naturale $n, k \geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Barem de evaluare și de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{5}-1)^2 + 2\sqrt{5} = (5-2\sqrt{5}+1) + 2\sqrt{5} = 6 \in \mathbb{N}$	3p 2p
2.	$f(x)=0$ are două soluții reale distincte $\Delta = m^2 - 16 > 0$ $m \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$	2p 1p 2p
3.	$2-x^2=x$ $x_1=1, x_2=-2$ x_1 convine și x_2 nu convine	1p 2p 2p
4.	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ Numărul submulțimilor cu cel mult un element este egal cu $C_7^0 + C_7^1 = 8 \Rightarrow 8$ cazuri favorabile Numărul submulțimilor mulțimii A este $2^7 = 128 \Rightarrow 128$ de cazuri posibile $p = \frac{1}{16}$	1p 2p 1p 1p
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$ $AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$	3p 2p
6.	$b = \frac{\pi}{3} - a \Rightarrow \cos b = \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right) =$ $= \frac{1}{2}\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a$, de unde concluzia	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$D(-1,2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $D(-1,2) = -1 + 1 + 8 + 2 + 2 + 2$ $D(-1,2) = 14$	1p 3p 1p
b)	$A(2,q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & q & 2 \end{pmatrix}$ Există minorul $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A(2,q) \geq 2$ $\text{rang } A(2,q) = 2 \Rightarrow D(2,q) = 0$ $q = -\frac{1}{2}$	1p 1p 1p 2p

c)	$D(x, y) = x^3 + 4y - 4x - xy + 1$ $D(y, x) = y^3 + 4x - 4y - yx + 1$ $D(x, y) = D(y, x) \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 8) = 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 - 8 = 0$ Finalizare: de exemplu $(x, y) = (0, 2\sqrt{2})$	1p 1p 2p 1p
2.a)	$f(1) = 2 - m$ $f(1) = 8$ Finalizare: $m = -6$	2p 2p 1p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -2 \in \mathbb{Z}$	2p 3p
c)	x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + X - 2 \Rightarrow$ polinomul $-2X^3 + X^2 + 1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ cu $a > 0 \Rightarrow g = 2X^3 - X^2 + 0 \cdot X - 1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ un exemplu este $a = 2, b = -1, c = 0, d = -1$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $f'(0) = 0$	3p 2p
b)	$f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă pe $[0, +\infty)$, deci ecuația dată are cel puțin o soluție $f'(x) > 0$ pentru orice $x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0, +\infty) \Rightarrow f$ este injectivă pe $[0, +\infty)$, deci soluția este unică	3p 2p
c)	$f(x_n) = n \Rightarrow e^{x_n} = n + x_n \Rightarrow e^{x_n} > n$ pentru că $x_n > 0$, oricare ar fi $n \geq 2$ $x_n > \ln n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$	2p 3p
2.a)	$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$ $= \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 1$	2p 3p
b)	$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx =$ $= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi^2}{4}$	1p 4p
c)	$t = kx \Rightarrow \int_0^{2\pi} f^n(kx) dx = \frac{1}{k} \int_0^{2k\pi} \cos^n t dt$ $\int_0^{2k\pi} \cos^n t dt = \int_0^{2\pi} \cos^n t dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \cos^n t dt + \dots + \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} \cos^n t dt =$	2p 2p

	$= k \int_0^{2\pi} \cos^n t \, dt$, deoarece $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \cos^n x$ este periodică de perioadă 2π , de unde concluzia	1p
--	--	-----------