

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și rația $r = 2$.
- 5p 2. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(m, 0)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 4) = \log_2 8$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p 5. Determinați numărul real a , știind că vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Arătați că $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $A(2014) + A(2016) = 2A(2015)$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2) + xA(3)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy - x - y - 2$.
- 5p a) Arătați că $(-1) * 1 = -1$.
- 5p b) Arătați că $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2) * (2x-3) = 5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^4}{x^2 + 1}$.
- 5p c) Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 x f(x) dx = \frac{7}{2}$.
- 5p b) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x + 2 \ln x + 2015$ este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x) - 1) \ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = a_1 + r = 1 + 2 = 3$	3p 2p
2.	$f(m) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0$ $m = -1$	3p 2p
3.	$x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, care verifică ecuația	2p 3p
4.	Mulțimea M are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile În mulțimea M sunt 2 numere divizibile cu 3, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	1p 2p 2p
5.	$\frac{a+1}{1} = \frac{4}{2}$ $a = 1$	3p 2p
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2014) = \begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2016) = \begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2015) = \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}$ $A(2014) + A(2016) = \begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix} = 2A(2015)$	3p 2p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - a$ $3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$	3p 2p
c)	$A(2) + xA(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xA(3)) = x + 1$ $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	3p 2p
2.a)	$(-1) * 1 = -(-1) \cdot 1 - (-1) - 1 - 2 =$ $= 1 + 1 - 1 - 2 = -1$	3p 2p
b)	$x * y = -xy - x - y - 1 - 1 =$ $= -x(y+1) - (y+1) - 1 = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

c)	$(x+2) * (2x-3) = -(x+3)(2x-2) - 1$ $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ și } x_2 = 0$	2p 3p
-----------	--	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x^3 - 16x =$ $= 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^2 + 16}{x^2 + 1} =$ $= -8$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0$ Coordonatele punctelor sunt $x_1 = -2, y_1 = 0; x_2 = 0, y_2 = 16$ și $x_3 = 2, y_3 = 0$	2p 3p
2.a)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 (x+2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _1^2 =$ $= 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$	3p 2p
b)	$F'(x) = (x + 2 \ln x + 2015)' = 1 + \frac{2}{x} =$ $= \frac{x+2}{x} = f(x), \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci } F \text{ este o primitivă a funcției } f$	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{2}{x} \ln x dx = \ln^2 x \Big _1^e =$ $= \ln^2 e - \ln^2 1 = 1$	3p 2p