

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $x = 2(1+i) - 2i$ este real.
- 5p 2. Calculați $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(5)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 1} = x + 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.
- 5p 5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
- 5p 6. Se consideră $E(x) = \sin x + \cos \frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det A$.
- 5p b) Arătați că $A^2 - 6A = I_2$.
- 5p c) Determinați inversa matricei $B = A - 6I_2$.
2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$.
- 5p a) Calculați $2 * 2$.
- 5p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = \sqrt{12}$.
- 5p c) Arătați că numărul $\underbrace{1 * 1 * \dots * 1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Verificați dacă $f(x) + f''(x) = 2(f'(x) + e^x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați punctele de extrem ale funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
- 5p a) Calculați $\int_0^1 (x+1) f(x) dx$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{4}$.
- 5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)$.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(1+i) = 2+2i$ $x = 2 \in \mathbb{R}$	3p 2p
2.	$f(2) = 0$ $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(5) = 0$	3p 2p
3.	$x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$ Rezultă $x = 0$, care verifică ecuația	2p 3p
4.	Numerele de două cifre având produsul cifrelor egal cu 5 sunt 15 și 51 $\Rightarrow$ 2 cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{45}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$	3p 2p
6.	$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 =$ $= 5 - 6 = -1$	3p 2p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$ $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	2p 3p
c)	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$2 * 2 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4} =$ $= \sqrt{12}$	2p 3p
b)	$\sqrt{x^2 + x^2 + 4} = \sqrt{12} \Leftrightarrow 2x^2 + 4 = 12$ $x = -2$ sau $x = 2$	2p 3p

c)	$\underbrace{1*1*\dots*1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}} = \sqrt{8 \cdot 1^2 + 4 \cdot (8-1)} = \sqrt{36}$	3p
	$\underbrace{1*1*\dots*1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}} = 6 \in \mathbb{Z}$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (e^x)'(x^2 - 6x + 9) + e^x(x^2 - 6x + 9)' =$	3p
	$= e^x(x^2 - 6x + 9) + e^x(2x - 6) = e^x(x^2 - 4x + 3), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f''(x) = e^x(x^2 - 2x - 1)$	2p
	$f(x) + f''(x) = e^x(2x^2 - 8x + 8) = 2(f'(x) + e^x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$	3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ sau } x = 3$	2p
	$f'(x) > 0 \text{ pentru } x \in (-\infty, 1), f'(x) < 0 \text{ pentru } x \in (1, 3) \text{ și } f'(x) > 0 \text{ pentru } x \in (3, +\infty)$	2p
	Punctele de extrem sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$	1p
2.a)	$\int_0^1 (x+1)f(x)dx = \int_0^1 \frac{x(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 xdx =$	2p
	$= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	3p
b)	$\int_0^1 x^2 f(x)dx + \int_0^1 x^3 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx =$	2p
	$= \int_0^1 \frac{x^3(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 x^3dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^1 = \frac{1}{4}$	3p
c)	$V = \pi \int_1^2 h^2(x)dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx =$	3p
	$= \pi \left(x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\right) \Big _0^1 = \pi \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)$	2p