

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $x = 3(1-i) + 3i$ este real.
- 5p 2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ cu axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+3} = 8$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, acesta să fie divizibil cu 4.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 3)$, $B(3, 0)$ și $C(2, 5)$. Calculați lungimea medianei din B a triunghiului ABC .
- 5p 6. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC , știind că $BC = 4$, $B = \frac{\pi}{6}$ și $C = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det(M(2))$.
- 5p b) Verificați dacă $M(x) \cdot M(y) = M(2xy - x - y + 1)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real a astfel încât $M(a) \cdot M(x) = M(a)$, pentru orice număr real x .
2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.
- 5p a) Calculați $0 \circ (-2)$.
- 5p b) Arătați că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = 6$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați punctele de extrem ale funcției f .
- 5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$.
- 5p a) Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.
- 5p b) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=4$.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Barem de evaluare și de notare

Varianța 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3(1-i) = 3-3i$ $x = 3 \in \mathbb{R}$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ sau $x = 2$ Distanța este egală cu 1	3p 2p
3.	$2x + 3 = 3$ $x = 0$	3p 2p
4.	Numerele din mulțimea A divizibile cu 4 sunt 4, 8, 12, 16 și 20 $\Rightarrow$ 5 cazuri favorabile Numărul de elemente ale mulțimii A este 20 $\Rightarrow$ 20 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{4}$	2p 1p 2p
5.	Mijlocul segmentului (AC) este $M(0,4)$ $BM = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$	2p 3p
6.	$A = \frac{\pi}{2}$ $AC = \frac{1}{2} \cdot BC = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(M(2)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 4 - 1 = 3$	2p 3p
b)	$M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} xy + (1-x)(1-y) & x(1-y) + (1-x)y \\ (1-x)y + x(1-y) & (1-x)(1-y) + xy \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2xy - x - y + 1 & 1 - (2xy - x - y + 1) \\ 1 - (2xy - x - y + 1) & 2xy - x - y + 1 \end{pmatrix} = M(2xy - x - y + 1)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$M(a) \cdot M(x) = M(a) \Leftrightarrow M(2ax - a - x + 1) = M(a)$, pentru orice număr real x $2ax - a - x + 1 = a$, pentru orice număr real x $a = \frac{1}{2}$	1p 2p 2p
2.a)	$0 \circ (-2) = 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 2 =$ $= -2$	3p 2p
b)	$x \circ y = xy + 2x + 2y + 2 = x(y+2) + 2(y+2) - 2 =$ $= (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$x \circ x \circ x = (x+2)^3 - 2$ $(x+2)^3 - 2 = 6 \Rightarrow x = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} =$ $= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}, \text{ pentru orice } x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$, deoarece $x \in (1, +\infty)$ $f'(2) = 0$; $f'(x) < 0$, pentru $x \in (1, 2)$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (2, +\infty)$ Punctul de extrem este $x = 2$	2p 2p 1p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$ Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = x - 1$	2p 2p 1p
2.a)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _1^2 = \frac{3}{2}$	2p 3p
b)	$F'(x) = \left(\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \right)' = x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 x\sqrt{x} dx =$ $= \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x} \Big _1^4 = \frac{62}{5}$	2p 3p