

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 4$ și rația $q = 2$.
- 5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+1) = \log_3 5$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. Determinați numărul real m , știind că punctul $M(1, 0)$ aparține dreptei de ecuație $y = mx - 2$.
- 5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , în care $AB = \sqrt{2}$ și $C = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Determinați numărul real x , știind că $A(x)A(x) = 2A(1)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(-1) + f(1) = 0$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Pentru $m = -1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.
- 5p c) Determinați numărul real m , știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(e) < \frac{7}{2}$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 x^2 f(x) dx = e(e-1)$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[2, +\infty)$.
- 5p c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 4 \cdot 2 = 8$	3p 2p
2.	$x_V = 1$ $y_V = -1$	2p 3p
3.	$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4$ $x = 2$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$	3p 2p
5.	$0 = m \cdot 1 - 2$ $m = 2$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$	2p 3p
b)	$A(a) + A(-a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	$A(x)A(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 4x + 5 & 4 - 2x \\ 4 - 2x & x^2 - 4x + 5 \end{pmatrix}$, $2A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ 4 - 2x = 2 \end{cases}$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
2.a)	$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 4 = -m - 1$ $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = m + 1 \Rightarrow f(-1) + f(1) = -m - 1 + m + 1 = 0$, pentru orice număr real m	2p 3p
b)	$m = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 0$ $X - 1$ divide f și $X + 1$ divide f , deci polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$	3p 2p

c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16 - 2m$	3p
	Cum $x_1x_2x_3 = -4$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{x_1x_2x_3} = 16 - 2m - \frac{4m}{-4} = 16 - m$, obținem	2p
	$m = 16$	

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} =$	3p
	$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}, \quad x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$f(2) = 3, \quad f'(2) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, adică $y = 3$	3p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (2, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(2, +\infty)$	2p
	Cum $2 < e < 3$ și $f(3) = \frac{7}{2}$, obținem $f(e) < \frac{7}{2}$	3p
2.a)	$\int_1^2 x^2 f(x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big _1^2 =$	3p
	$= e^2 - e = e(e-1)$	2p
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p
	$F''(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3} \geq 0$, pentru orice $x \in [2, +\infty)$, deci funcția F este convexă pe $[2, +\infty)$	3p
c)	$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$	2p
	Cum $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq 1$, obținem $\frac{e^x}{x^2} \leq e^x$, deci $\mathcal{A} \leq \int_1^2 e^x dx$, adică $\mathcal{A} \leq e(e-1)$	3p