

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_3 = 5$ și $b_4 = 10$. |
| 5p | 2. Determinați valoarea maximă a funcției $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 12} = x + 2$. |
| 5p | 4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 4)$ și $B(1, 0)$. Determinați ecuația dreptei AB . |
| 5p | 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , în care $AB = 6$ și $C = \frac{\pi}{3}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$. |
| 5p | b) Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x + y - xy)$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele reale x , $x \neq 1$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$. |
| 5p | a) Arătați că $x \circ y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Arătați că $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = 3$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x \circ x = x$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\ln x \leq x - 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 1$. |
| 5p | b) Demonstrați că $\int_0^1 x^2 f(x) dx = 1 - \frac{\pi}{4}$. |
| 5p | c) Determinați numerele naturale n , știind că $\int_n^{n+1} 2x f(x) dx = \ln 2$. |

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{10}{5} =$ $= 2$	3p 2p
2.	$x \leq 5 \Rightarrow x - 3 \leq 2$ $f(x) \leq 2$, deci valoarea maximă a funcției este 2	2p 3p
3.	$x^2 + 12 = (x + 2)^2 \Rightarrow 4x - 8 = 0$ $x = 2$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} =$ $= 21$	3p 2p
5.	$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-1}{3-1}$ $y = 2x - 2$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$ $= 2\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+y & -y \\ 2y & 1-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x+y-xy & -y-x+xy \\ 2x+2y-2xy & 1-2y-2x+2xy \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+(x+y-xy) & -(x+y-xy) \\ 2(x+y-xy) & 1-2(x+y-xy) \end{pmatrix} = A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(x)A(x) = I_2$ și, cum $I_2 = A(0)$, obținem $A(x+x-x^2) = A(0)$ $2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 2$	3p 2p
2.a)	$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 =$ $= 2x(y-3) - 6(y-3) + 3 = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = ((1 \circ 2) \circ 3) \circ 4 =$ $= 3 \circ 4 = 3$	3p 2p

c)	$x \circ x = 2(x-3)^2 + 3, x \circ x \circ x = 4(x-3)^3 + 3$	2p
	$4(x-3)^3 + 3 = x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ sau } x = 3 \text{ sau } x = \frac{7}{2}$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - (\ln x)' =$	2p
	$= 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p
b)	$f''(x) = \frac{1}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	2p
	$f''(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty) \Rightarrow f \text{ este convexă pe intervalul } (0, +\infty)$	3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	1p
	$x \in (0, 1] \Rightarrow f'(x) \leq 0, \text{ deci } f \text{ este descrescătoare pe } (0, 1]$	1p
	$x \in [1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0, \text{ deci } f \text{ este crescătoare pe } [1, +\infty)$	1p
	Cum $f(1) = 1$, obținem $f(x) \geq 1$, deci $\ln x \leq x - 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 1 dx = x \Big _0^1 =$	3p
	$= 1 - 0 = 1$	2p
b)	$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx =$	2p
	$= x \Big _0^1 - \arctg x \Big _0^1 = 1 - \arctg 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$	3p
c)	$\int_n^{n+1} 2x f(x) dx = \int_n^{n+1} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \Big _n^{n+1} = \ln \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1}$	3p
	$\ln \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} = \ln 2 \Leftrightarrow n^2 - 2n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \text{ sau } n = 2$	2p