

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică M_{mate-info}

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ și $z_2 = 1 + 2i$. Arătați că $2z_1 - 3z_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
- 5p** 5. Determinați numărul real a , pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(0) = -1$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m , unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 2(e^x - x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-2}^1 (x+2)^2 dx = 9$.
- 5p** b) Pentru $n=1$, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x dx = 2e - 1$.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$ are aria egală cu $\frac{242}{n+1}$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2z_1 - 3z_2 = 2(2 + 3i) - 3(1 + 2i) =$ $= 4 + 6i - 3 - 6i = 1$	2p 3p
2.	$x_1 + x_2 = 3m$, $x_1 x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1 = 3m + 3$ $3m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$	3p 2p
3.	$\log_4((x+3)(x-3)) = 2 \Rightarrow x^2 - 9 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 25 = 0$ $x = -5$, care nu convine, $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 sunt 16, 23, 32 și 61, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{a}{3} = \frac{2}{-3}$ $a = -2$	3p 2p
6.	$(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x =$ $= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru orice număr real x	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 1 - 1 - 0 - 1 = -1$	2p 3p
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = x - 1$, $\det(A(x+1)) = x \Rightarrow (x-1)x = 12$ $x = -3$ sau $x = 4$	3p 2p
c)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A(2)) = 1 \neq 0$, $(A(2))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $X = (A(2))^{-1} \cdot A(0) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 - (m+2) \cdot 0^2 + (m^2 + 2) \cdot 0 - 1 =$ $= 0 - 0 + 0 - 1 = -1$, pentru orice număr real m	2p 3p

b)	$x_1 + x_2 + x_3 = m + 2, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m^2 + 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -m^2 + 4m$ $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$ $= 2(-m^2 + 4m - m^2 - 2) = -4(m-1)^2, \text{ pentru orice număr real } m$	3p 2p
c)	$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geq 0, \text{ deci}$ $(m-1)^2 \leq 0$ $m=1, \text{ caz în care toate rădăcinile polinomului } f \text{ sunt numere reale}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (2e^x)' - (x^2)' - (2x)' - (2)' =$ $= 2e^x - 2x - 2 = 2(e^x - x - 1), \quad x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$ Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0), \text{ adică } y = 0$	2p 3p
c)	$f''(x) = 2(e^x - 1), \quad x \in \mathbb{R}$ $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f''(x) \leq 0, \text{ deci } f' \text{ este descrescătoare pe } (-\infty, 0]$ $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f''(x) \geq 0, \text{ deci } f' \text{ este crescătoare pe } [0, +\infty)$ $f'(x) \geq f'(0) \text{ și } f'(0) = 0 \text{ implică } f'(x) \geq 0 \text{ pentru orice număr real } x, \text{ deci funcția } f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	1p 1p 1p 2p
2.a)	$\int_{-2}^1 (x+2)^2 dx = \frac{(x+2)^3}{3} \Big _{-2}^1 =$ $= \frac{3^3}{3} - 0 = 9$	3p 2p
b)	$\int_0^1 (x+2)e^x dx = (x+2)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = 3e - 2 - e^x \Big _0^1 =$ $= 3e - 2 - e + 1 = 2e - 1$	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x+2)^n dx = \frac{(x+2)^{n+1}}{n+1} \Big _{-1}^1 = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$ $\frac{3^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{242}{n+1} \Leftrightarrow 3^{n+1} = 243 \Leftrightarrow 3^{n+1} = 3^5 \Leftrightarrow n = 4$	3p 2p