

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 4$ și $a_2 = 7$.
- 5p 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 1 = 0$. Arătați că $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} = \frac{1}{8}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctele A , B și C sunt coliniare.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$ și $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x)A(y) = xyI_2$, pentru orice numere reale x și y , unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(27)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$, unde m este număr real.
- 5p a) Pentru $m = 1$, arătați că $f(1) = 0$.
- 5p b) Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X + 2$, atunci restul împărțirii lui f la $X + 3$ este egal cu -1 .
- 5p c) Determinați numărul real m , știind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2017}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{4}{3}$.
- 5p b) Determinați primitiva F a funcției f , știind că $F(1) = \frac{\pi}{4} + 1$.
- 5p c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^n x f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 5$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_2 - a_1 = 3$ $a_3 = 10$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = 1$ $4x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 4 \cdot 1 - 4 = 0$	2p 3p
3.	$2^{2x+1} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2x+1 = -3$ $x = -2$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii de 15 sunt numerele 15, 30, 45, 60, 75 și 90, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$	2p 2p 1p
5.	$m_{AB} = 0, m_{AC} = \frac{a-1}{3}$ $m_{AB} = m_{AC} \Leftrightarrow \frac{a-1}{3} = 0 \Leftrightarrow a = 1$	2p 3p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$	2p 3p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = xy \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xyI_2$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(3^{3a+3})$ $A(3^{3a+3}) = A(27) \Rightarrow 3^{3a+3} = 3^3$, de unde obținem $a = 0$	3p 2p
2.a)	$f = X^3 + X^2 + 2X - 4 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$	3p 2p

b)	$f(-2) = 0 \Rightarrow m = 4$, deci $f = X^3 + 4X^2 + 2X - 4$ $f(-3) = -27 + 36 - 6 - 4 = -1$	3p 2p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, $x_1x_2x_3 = 4$ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} + (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{2} - m$, deci $m = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x+2017)'e^x - (x+2017)(e^x)'}{(e^x)^2} =$ $= \frac{e^x(1-x-2017)}{(e^x)^2} = \frac{-(x+2016)}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(0) = 2017$, $f'(0) = -2016$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -2016x + 2017$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{x+2015}{e^x}, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [-2015, +\infty)$, deci f este convexă pe $[-2015, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \arctg x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $F(1) = \frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = 1$, deci $F(x) = \arctg x + 1$	2p 3p
c)	$\int_0^n x f(x) dx = \int_0^n \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big _0^n = \frac{1}{2} \ln(n^2 + 1)$ $\frac{1}{2} \ln(n^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln 5$, deci $n^2 + 1 = 5$, de unde obținem $n = 2$	3p 2p