

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ și $a_3 = 8$.
- 5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x = \log_3(4 - x)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 4.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(4,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overline{AM} = \frac{1}{3} \overline{AB}$.
- 5p 6. Arătați că $4 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det(A(-1))$.
- 5p b) Verificați dacă $A(0) \cdot A(1) = 5A(1)$.
- 5p c) Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)) = 0$.
2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.
- 5p a) Verificați dacă $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $x \circ 2 = 2 \circ x = 2$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2012 \circ 2013$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{f(x)}$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
- 5p a) Arătați că $I_1 = \frac{e-2}{e}$.
- 5p b) Verificați dacă $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Arătați că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$S_3 = \frac{(a_1 + a_3) \cdot 3}{2} = \frac{(2 + 8) \cdot 3}{2} = 15$	3p 2p
2.	$x_V = 2$ $y_V = -2$	2p 3p
3.	$x = 4 - x$ Rezultă $x = 2$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Numerele de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 4 sunt 14, 22 și 41 $\Rightarrow$ 3 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{30}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ și $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1)\vec{i} + (y_M - 1)\vec{j}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 1 \end{cases}$	2p 3p
6.	$4\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 2\sin \frac{\pi}{6} = 1$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 8 - 8 = -16$	2p 3p
b)	$A(0) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} = 5A(1)$	2p 3p
c)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -(m+5)(m-1)^2$ $\det(A(m)) = 0 \Leftrightarrow m = -5 \text{ sau } m = 1$	3p 2p

2.a)	$xy - 2x - 2y + 6 = x(y - 2) - 2(y - 2) + 2 =$	3p
	$= (x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice numere reale x și y	2p
b)	$x \circ 2 = (x - 2)(2 - 2) + 2 = 2$, pentru orice număr real x	2p
	$2 \circ x = (2 - 2)(x - 2) + 2 = 2 \Rightarrow x \circ 2 = 2 \circ x = 2$, pentru orice număr real x	3p
c)	$1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2012 \circ 2013 = (1 \circ 2) \circ 3 \circ \dots \circ 2012 \circ 2013 =$	3p
	$= 2 \circ (3 \circ \dots \circ 2012 \circ 2013) = 2$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^3 - 1)'(x^2 + 1) - (x^3 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$	2p
	$= \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) =$	3p
	$= 0$	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$	1p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x^3-1}{x^2+1}} =$	2p
	$= e^2$	2p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big _0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx =$	3p
	$= -\frac{1}{e} - e^{-x} \Big _0^1 = \frac{e-2}{e}$	2p
b)	$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = -x^{n+1} e^{-x} \Big _0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx =$	3p
	$= -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$	2p
c)	Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $0 < e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$	2p
	$0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$	3p