

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-5, 5)$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Calculați $(f \circ f)(1)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} = x - 3$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, acesta să fie multiplu de 11.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2, 2)$ și $N(4, 2)$. Determinați coordonatele punctului P , situat pe axa Ox , astfel încât $PM = PN$.
- 5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC , în care $AB = 6\sqrt{2}$ și $C = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & x & 2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(x)) = (2^x - 1)(2^x + x - x \cdot 2^x)$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Arătați că $A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(2017) = \begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2(2^{2017} - 1) & \frac{4}{3}(4^{2017} - 1) \\ 2017 & 2017 \cdot 1009 & 2017 \cdot 2018 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 7xy + 7x + 7y + 6$.
- 5p a) Arătați că $x * y = 7(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x = x$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă a , b și c sunt numere naturale astfel încât $a * b * c = 48$, atunci numerele a , b și c sunt egale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $-2e \leq f(x) \leq \frac{6}{e^3}$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Determinați numărul real m , $m > 0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1 - \ln \frac{m+1}{m}$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 =$ $= 0$	3p 2p
2.	$f(1) = 0$ $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(0) = -1$	2p 3p
3.	$x + 3 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$ $x = 1$ care nu convine, $x = 6$ care convine	3p 2p
4.	În mulțimea A sunt 100 de numere, deci sunt 100 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{100}$	2p 2p 1p
5.	$P \in Ox \Rightarrow y_P = 0$ $PM = PN \Leftrightarrow (2 - x_P)^2 + (2 - 0)^2 = (4 - x_P)^2 + (2 - 0)^2 \Leftrightarrow x_P = 3$	2p 3p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$ $= 6$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 1 + 4 - 2 - 4 - 2 = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & x & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2^x - 1 & 4^x - 1 \\ 0 & x - 1 & 2x - 1 \end{vmatrix} = (2^x - 1) \begin{vmatrix} 1 & 2^x + 1 \\ x - 1 & 2x - 1 \end{vmatrix} =$ $= (2^x - 1)(2x - 1 - x \cdot 2^x + 2^x - x + 1) = (2^x - 1)(2^x + x - x \cdot 2^x)$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(2017) = \begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2017} & 4^1 + 4^2 + \dots + 4^{2017} \\ 2017 & 2017 \cdot 1009 & 2017 \cdot 2018 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & \frac{2(2^{2017} - 1)}{2 - 1} & \frac{4(4^{2017} - 1)}{4 - 1} \\ 2017 & 2017 \cdot 1009 & 2017 \cdot 2018 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2(2^{2017} - 1) & \frac{4}{3}(4^{2017} - 1) \\ 2017 & 2017 \cdot 1009 & 2017 \cdot 2018 \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$x * y = 7xy + 7x + 7y + 7 - 1 =$ $= 7x(y+1) + 7(y+1) - 1 = 7(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$x * x * x = 7^2(x+1)^3 - 1$, deci $7^2(x+1)^3 - 1 = x$ $(x+1)\left(7^2(x+1)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}$ sau $x = -1$ sau $x = -\frac{6}{7}$	2p 3p
c)	$49(a+1)(b+1)(c+1) - 1 = 48 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 1$ Cum a, b și c sunt numere naturale, obținem $a+1 = b+1 = c+1 = 1$, deci $a = b = c$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2 - 3)' \cdot e^x - (x^2 - 3) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - (x^2 - 3)e^x}{(e^x)^2} =$ $= \frac{e^x(2x - x^2 + 3)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(-1) = -2e, f'(-1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, adică $y = -2e$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 3$ $x \in [-1, 3] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1, 3]$ și $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[3, +\infty)$ Cum $f(-1) = -2e, f(3) = \frac{6}{e^3}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, obținem $-2e \leq f(x) \leq \frac{6}{e^3}$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$	1p 2p 2p
2.a)	$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x) dx = \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx =$ $= \ln(x+1) \Big _1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$	2p 3p
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x), x \in (0, +\infty)$ $F'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$	2p 3p
c)	$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx = x \Big _1^2 - \ln(x+1) \Big _1^2 = 1 - \ln \frac{3}{2}$ $1 - \ln \frac{m+1}{m} = 1 - \ln \frac{3}{2} \Rightarrow m = 2$	3p 2p