

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real x știind că numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Arătați că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 4$ este situată deasupra axei Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 4)$ și $B(1, 2)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 4xy)$ pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale x , $x \neq -\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 - 4X + 2a$, unde a este număr real.
- 5p a) Calculați $f(0)$.
- 5p b) Determinați numărul real a știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f .
- 5p c) Pentru $a = 3$, arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^3 + 1} dx$.
- 5p a) Arătați că $I_2 = \frac{1}{3} \ln 2$.
- 5p b) Arătați că $I_{n+3} + I_n = \frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c) – 2 iulie 2014

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Barem de evaluare și de notare

Varianța 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2 \cdot (x+5) = 4^2$ $x = 3$	2p 3p
2.	$\Delta = 1 - 16 = -15$ $a = 1 > 0$ și $\Delta < 0 \Rightarrow$ parabola asociată funcției f este situată deasupra axei Ox	2p 3p
3.	$x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$ $x_1 = -3$ și $x_2 = 3$	3p 2p
4.	Sunt 7 numere de două cifre care au suma cifrelor egală cu 7, deci sunt 7 cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	2p 1p 2p
5.	$M(0,3)$ $OM = 3$	2p 3p
6.	$x = \frac{\pi}{6}$ $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 4y+1 & 0 \\ 0 & 3y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x+2y+8xy & 0 \\ 0 & 4x+4y+16xy+1 & 0 \\ 0 & 3x+3y+12xy & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2(x+y+4xy) & 0 \\ 0 & 4(x+y+4xy)+1 & 0 \\ 0 & 3(x+y+4xy) & 1 \end{pmatrix} = A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(x) \cdot A(x) = I_3 \Rightarrow A(2x+4x^2) = A(0) \Rightarrow 2x+4x^2 = 0$ $x_1 = 0$ și $x_2 = -\frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 + 0^2 - 4 \cdot 0 + 2a =$ $= 2a$	2p 3p
b)	$x_1 = 1+i \Rightarrow x_2 = 1-i$ $x_1 + x_2 + x_3 = -1 \Rightarrow x_3 = -3$ $x_1 x_2 x_3 = -2a \Rightarrow a = 3$	1p 2p 2p

c)	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (1+i)^3 + (1-i)^3 + (-3)^3 =$ $= (2i-2) + (-2i-2) - 27 = -31$	3p 2p
SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)		
1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x-2) - x^2 \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} =$ $= \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}, x \in (2, +\infty)$	2p 3p
b)	$y - f(4) = f'(4)(x-4)$ $f(4) = 8, f'(4) = 0, \text{ deci ecuația tangentei este } y = 8$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ $f'(x) \leq 0 \text{ pentru orice } x \in (2, 4] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (2, 4]$ $f'(x) \geq 0 \text{ pentru orice } x \in [4, +\infty) \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } [4, +\infty)$	1p 2p 2p
2.a)	$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1} dx =$ $= \frac{1}{3} \ln(x^3+1) \Big _0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$	2p 3p
b)	$I_{n+3} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+3}}{x^3+1} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{x^3+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^3+1)}{x^3+1} dx =$ $= \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ pentru orice număr natural nenul } n$	3p 2p
c)	Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [0, 1]$ avem $x^n \geq 0, x^3 + 1 > 0 \Rightarrow I_n \geq 0$ $I_{n+3} \geq 0 \text{ și } I_{n+3} + I_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	2p 3p