

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică M_{mate-info}

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați partea reală a numărului complex $z = 1 + 2i + 3i^2$.
- 5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 5$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x} = 3^{2x}$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m știind că $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 3$ și $BC = 3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Arătați că $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale x știind că $A(x^2 + 2) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(2) = 2(a-3)$.
- 5p b) Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin $X^2 - X + 1$.
- 5p c) Pentru $a = 3$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(2^x) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{x+2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că ecuația $f(x) = 1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1, 2)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.
- 5p a) Arătați că $I_1 = 1 - \ln 2$.
- 5p b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Barem de evaluare și de notare

Varianța 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = -2 + 2i$ Partea reală a numărului z este egală cu -2	2p 3p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 1 = 3x - 5$ $x = 2$ și $y = 1$	3p 2p
3.	$x^2 - x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$ și $x_2 = 3$	3p 2p
4.	Cifra unităților poate fi 0 sau 2 Cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 2 = 6$ numere	2p 3p
5.	$(m+1)\vec{i} + 4\vec{j} = 2(3\vec{i} + 2\vec{j})$ $m = 5$	2p 3p
6.	$\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y)^2 - 2(x+y) & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$ $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 2y & 4x + 4y & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = A(3x)$ $x^2 + 2 = 3x \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 2$	2p 3p
2.a)	$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 2 =$ $= 2a - 6 = 2(a - 3)$	2p 3p
b)	$f = (X - 2)(X^2 - X + 1) + (a - 3)X$ $a = 3$	3p 2p

c)	$f = (X - 2)(X^2 - X + 1)$	2p
	$(2^x - 2)(2^{2x} - 2^x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(xe^x)' \cdot (x+2) - xe^x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} =$	2p
	$= \frac{(e^x + xe^x) \cdot (x+2) - xe^x}{(x+2)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x+2)^2}, x \in (-2, +\infty)$	3p
b)	$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$	2p
	$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{2}, \text{ deci ecuația tangentei este } y = \frac{1}{2}x$	3p
c)	Funcția $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - 1$ este continuă pe $[1, 2]$	2p
	$g(1) \cdot g(2) = \frac{e-3}{3} \cdot \frac{e^2-2}{2} < 0, \text{ deci există } c \in (1, 2) \text{ astfel încât } g(c) = 0, \text{ adică } f(c) = 1$	3p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$	2p
	$= x \Big _0^1 - \ln(1+x) \Big _0^1 = 1 - \ln 2$	3p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n \left(\frac{x}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx$	2p
	Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x-1 \leq 0, x^n \geq 0, 1+x^n > 0$ și $1+x^{n+1} > 0$, deci $I_{n+1} - I_n \leq 0$	3p
c)	Pentru orice $x \in [0, 1]$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$	2p
	$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	3p