

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(5 - 4i)^2 + (5 + 4i)^2 = 18$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,3)$. Determinați coordonatele punctului M , știind că punctul B este mijlocul segmentului AM .
- 5p 6. Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB = 6$, $BC = 3$ și $m(\angle ABC) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x)A(y)A(z) = xyz I_3$, pentru orice numere reale x , y și z .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n , numărul $\det(A(n)A(n) + A(n) + I_3)$ este pătratul unui număr natural.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^2 + 4$, unde a este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real a , știind că $f(2) = 0$.
- 5p b) Pentru $a = -5$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X - 2$.
- 5p c) Determinați rădăcinile polinomului f , știind că $f(i) = 0$, unde $i^2 = -1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (e^x + 1) f(x) dx = e - 1$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_{-1}^1 x(f(x) + f(-x)) dx = 0$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria mai mică decât $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$25 - 40i + 16i^2 + 25 + 40i + 16i^2 =$ $= 50 + 32i^2 = 50 - 32 = 18$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$ $x = 2$ și $x = 4$	3p 2p
3.	$x^2 - x - 2 = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 3x = 6$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 9 sunt 19, 33 și 91, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	2p 2p 1p
5.	$x_B = \frac{x_A + x_M}{2} \Rightarrow x_M = 2$ $y_B = \frac{y_A + y_M}{2} \Rightarrow y_M = 5$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC) = 6 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ =$ $= 18 \cdot \frac{1}{2} = 9$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(x)A(y)A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \\ xy & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} xyz & 0 & 0 \\ 0 & xyz & 0 \\ 0 & 0 & xyz \end{pmatrix} = xyz I_3$, pentru orice numere reale x, y și z	3p 2p

c)	$A(n)A(n) + A(n) + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \\ n^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n^2 & n \\ n & 1 & n^2 \\ n^2 & n & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A(n)A(n) + A(n) + I_3) = \begin{vmatrix} 1 & n^2 & n \\ n & 1 & n^2 \\ n^2 & n & 1 \end{vmatrix} = n^6 - 2n^3 + 1 = (n^3 - 1)^2, \text{ care este pătratul}$ unui număr natural	2p 3p
2.a)	$f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^4 + a \cdot 2^2 + 4 = 0$ $4a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = -5$	3p 2p
b)	$f = X^4 - 5X^2 + 4$; câtul este $X^2 - X - 2$ Restul este 0	3p 2p
c)	$1 - a + 4 = 0 \Rightarrow a = 5$ $f = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$, de unde obținem $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = 2i$ și $x_4 = -2i$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right) =$ $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(0) = 0, f'(0) = 1$ Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = x$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -\infty$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (e^x + 1) f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big _0^1 =$ $= e^1 - e^0 = e - 1$	3p 2p
b)	$\int_{-1}^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \int_{-1}^1 x \left(1 - \frac{1}{e^x+1} + 1 - \frac{1}{e^{-x}+1} \right) dx =$ $= \int_{-1}^1 x \left(2 - \frac{e^x+1}{e^x+1} \right) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _{-1}^1 = 0$	2p 3p
c)	$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{e^x+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) \Big _0^1 = \ln \frac{e+1}{2}$ Cum $e < 3 \Rightarrow \frac{e+1}{2} < 2$, obținem $\mathcal{A} < \ln 2$	3p 2p