

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{20}{7} = 2$.
- 5p 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 0)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} = 4$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie multiplu de 15.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 2)$ și $B(4, 6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 5p 6. Arătați că $\sin x = \frac{12}{13}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -2$.
- 5p b) Arătați că $A + B = 5C$.
- 5p c) Demonstrați că $AB + BA + 4I_2 = 25C$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.
- 5p a) Arătați că $5 \circ (-4) = -4$.
- 5p b) Arătați că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 6x(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - 2x^3}$.
- 5p c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x^2$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3x^2) dx = 15$.
- 5p b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 2015$.
- 5p c) Determinați numărul natural n , $n > 1$, știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2} dx = 9$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$ $\frac{7}{10} \cdot \frac{20}{7} = 2$	3p 2p
2.	$f(a) = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 0$ $a = 2$	3p 2p
3.	$x + 3 = 16$ $x = 13$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile În mulțimea M sunt 3 multipli de 15, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	1p 2p 2p
5.	$x_M = 4$ $y_M = 4$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	2p 3p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{12}{13}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 =$ $= 4 - 6 = -2$	3p 2p
b)	$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} =$ $= 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5C$	3p 2p
c)	$AB = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, 4I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $AB + BA + 4I_2 = \begin{pmatrix} 25 & 25 \\ 25 & 25 \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 25C$	3p 2p
2.a)	$5 \circ (-4) = 5 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) + 12 =$ $= -20 + 20 - 16 + 12 = -4$	3p 2p

b)	$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 =$ $= x(y + 4) + 4(y + 4) - 4 = (x + 4)(y + 4) - 4$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$x \circ x = (x + 4)^2 - 4$ $(x + 4)^2 - 4 = x \Leftrightarrow (x + 4)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$ și $x_2 = -3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (2x^3)' + (3x^2)' + 5' =$ $= 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x(x + 1)}{3x^2 + 5} =$ $= 2$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 0$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-1, 0]$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	2p 1p 1p 1p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 3x^2) dx = \int_1^2 4x^3 dx = x^4 \Big _1^2 =$ $= 16 - 1 = 15$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^4 + x^3 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $F(1) = 2015 \Rightarrow c = 2013$, deci $F(x) = x^4 + x^3 + 2013$	2p 3p
c)	$\int_1^n \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^n (4x + 3) dx = 2x^2 \Big _1^n + 3x \Big _1^n = 2n^2 + 3n - 5$ $2n^2 + 3n - 5 = 9$ și cum n este număr natural, $n > 1$, obținem $n = 2$	3p 2p