

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{10} = 5$.
- 5p 2. Calculați $f(-2) + f(2)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = 3$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 5.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $M(0,4)$ și $N(4,0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel.
- 5p 6. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A , știind că $AB=10$ și $AC=12$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot A + I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Demonstrați că $\det(A - aI_2) \geq 1$, pentru orice număr real a .
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X^2 + X + 5$.
- 5p a) Arătați că $f(-5) = 0$.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 6X + 5$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{23}{5}$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $0 \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - \sqrt{x}) dx = \frac{26}{3}$.
- 5p b) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2015$ este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x) - \sqrt{x})e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} = 5$	3p 2p
2.	$f(-2) = 0, f(2) = 0$ $f(-2) + f(2) = 0$	2p 3p
3.	$2x - 1 = 9$ $x = 5$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea A sunt 2 multipli de 5, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	1p 2p 2p
5.	$MO = 4$ $ON = 4 \Rightarrow \triangle MON$ este isoscel	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} =$ $= 60$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 5 =$ $= -9 + 10 = 1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A \cdot A + I_2 = \begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$A - aI_2 = \begin{pmatrix} 3-a & -2 \\ 5 & -3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - aI_2) = \begin{vmatrix} 3-a & -2 \\ 5 & -3-a \end{vmatrix} = -9 + a^2 + 10 =$ $= a^2 + 1 \geq 1$, pentru orice număr real a	3p 2p
2.a)	$f(-5) = (-5)^3 + 5 \cdot (-5)^2 + (-5) + 5 =$ $= -125 + 125 - 5 + 5 = 0$	3p 2p
b)	Câtul este $X - 1$ Restul este $2X + 10$	3p 2p

c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -5, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1, x_1x_2x_3 = -5$	3p
	$\frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_1}{x_2x_3} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3} = \frac{(-5)^2 - 2 \cdot 1}{-5} = -\frac{23}{5}$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x^3 - 4x =$	3p
	$= 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1), x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(1) = 0, f'(1) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = 0$	3p
c)	$f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0, f'(x) \geq 0, \text{ pentru } x \in [-1, 0] \text{ și } f'(x) \leq 0, \text{ pentru } x \in [0, 1]$	2p
	$f(-1) = f(1) = 0 \text{ și } f(0) = 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1]$	3p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) - \sqrt{x}) dx = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^3 =$	3p
	$= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$	2p
b)	$F'(x) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) =$	3p
	$= x^2 + \sqrt{x} = f(x), \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci } F \text{ este o primitivă a funcției } f$	2p
c)	$\mathcal{A} = \int_1^2 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big _1^2 - \int_1^2 2xe^x dx = 4e^2 - e - 2 \left(xe^x \Big _1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) =$	3p
	$= 4e^2 - e - 2(2e^2 - e) + 2e^x \Big _1^2 = 2e^2 - e = e(2e - 1)$	2p