

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 2(5 - \sqrt{5})$ și $b = 2\sqrt{5}$.
- 5p** 2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x-1) - \log_5 3 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(6,4)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 5p** 6. Arătați că $\sin(a+b) = \frac{63}{65}$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\sin b = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Calculați $\det A$.
- 5p** b) Determinați numerele reale p pentru care $A \cdot A = pA$.
- 5p** c) Determinați matricele $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, știind că $\det(A+B) = 0$, unde b este un număr real.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție dată de $x \circ y = -xy + x + y$.
- 5p** a) Calculați $1 \circ 2015$.
- 5p** b) Arătați că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x \circ 5^x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 5p** b) Arătați că $f'(x) = -\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x$.
- 5p** a) Calculați $\int_{-1}^1 x^5 dx$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^5) e^x dx = 1$.
- 5p** c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^3}$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$m_a = \frac{10 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2} =$ $= \frac{10}{2} = 5$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$	3p 2p
3.	$\log_5 \frac{2x-1}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3} = 1$ $x = 2$ care verifică ecuația	3p 2p
4.	Sunt 4 numere de o cifră multipli ai lui 3, deci sunt 4 cazuri favorabile Sunt 10 numere de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	2p 1p 2p
5.	M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow x_M = \frac{2+6}{2} = 4$ $y_M = 4$	3p 2p
6.	$\cos a = \frac{4}{5}, \cos b = \frac{5}{13}$ $\sin(a+b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{63}{65}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 =$ $= 0$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $p = 1$	3p 2p
c)	$A + B = \begin{pmatrix} 2 & b-2 \\ b+1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = -b^2 + b$ $\det(A+B) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ sau $b = 1 \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$1 \circ 2015 = -1 \cdot 2015 + 1 + 2015 =$ $= 1$	3p 2p

b)	$x \circ y = -x(y-1) + (y-1) + 1 =$ $= -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$(3^x - 1)(5^x - 1) = 0$ $x = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x^2 + 1} =$ $= \frac{3 \cdot 1}{1^2 + 1} = \frac{3}{2}$	2p 3p
b)	$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 1$ $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -1]$ $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1]$ $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	2p 1p 1p 1p
2.a)	$\int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx =$ $= e - 0 - e + 1 = 1$	3p 2p
c)	$g(x) = \frac{(x^5 + x) - x}{x^3} = x^2 \Rightarrow V = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big _1^2 =$ $= \frac{31}{5} \pi$	3p 2p