

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 3$ și rația $r = 2$.
- 5p** 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.
- 5p** 4. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, știind că M este mijlocul segmentului BC .
- 5p** 6. Calculați $\operatorname{ctg} a$, știind că $\sin a = \frac{1}{3}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Calculați $\det(A(3))$.
- 5p** b) Arătați că $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.
2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și $a \in \mathbb{Z}_5$.
- 5p** a) Calculați $f(\hat{0})$.
- 5p** b) Determinați $a \in \mathbb{Z}_5$, știind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.
- 5p** c) Arătați că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.
- 5p** a) Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n , știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$, are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică M_{st-nat}

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_2 + a_3 = 3 + (3 + 2) + (3 + 2 \cdot 2) =$ $= 15$	3p 2p
2.	$-\frac{b}{2a} = -1$ $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{12}{4} = -3$	2p 3p
3.	$x^2 - 4x + 4 = 0$ $x = 2$ care verifică ecuația	3p 2p
4.	Numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente este egal cu $C_5^3 =$ $= 10$	3p 2p
5.	$M(-2, 3)$ $AM = 4$	2p 3p
6.	$\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\operatorname{ctg} a = 2\sqrt{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(3)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 =$ $= 3$	3p 2p
b)	$A(-2015) = \begin{pmatrix} 2 & -2015 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A(2015) = \begin{pmatrix} 2 & 2015 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $A(-2015) + A(2015) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2A(0)$	2p 3p
c)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - x$ $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ și } x_2 = 2$	2p 3p
2.a)	$f(\hat{0}) = \hat{0}^3 + a \cdot \hat{0} =$ $= \hat{0}$	2p 3p
b)	$f(\hat{3}) = \hat{2} + a \cdot \hat{3}$ $\hat{2} + a \cdot \hat{3} = \hat{3} \Rightarrow a = \hat{2}$	2p 3p
c)	$\hat{1} + a = \hat{3} + a \cdot \hat{2} \Rightarrow a = \hat{3}$ $f(\hat{3}) = \hat{1}$ și $f(\hat{4}) = \hat{1} \Rightarrow f(\hat{3}) = f(\hat{4})$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x + \ln x)' \cdot x - (x + \ln x) \cdot x'}{x^2} =$ $= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x - x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$	2p
		3p
b)	$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $f(1) = 1, \quad f'(1) = 1$, deci ecuația tangentei este $y = x$	2p
		3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, e] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, e]$ $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [e, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[e, +\infty)$	1p
		2p
		2p
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	3p
		2p
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$ $= \left(\frac{x^3}{3} + x - \ln(x+1) \right) \Big _0^1 = \frac{4}{3} - \ln 2$	2p
		3p
c)	$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right) \Big _0^1 = \frac{1}{2} + \ln 2$ $\frac{1}{2} + \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln(n^2 + n) \Rightarrow n = -2 \text{ nu este număr natural și } n = 1$	3p
		2p