

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Determinați numerele reale a și b , știind că $a + ib$ este conjugatul numărului complex $z = \frac{1+i}{1-i}$. |
| 5p | 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 12$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 4) = \log_3(6x - 12)$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100. |
| 5p | 5. Se consideră punctele A , B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. |
| 5p | 6. Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC , știind că $BC = 8$, $A = \frac{\pi}{4}$ și $C = \frac{7\pi}{12}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $A(x) + A(-x) = 2A(0)$, pentru orice număr real x . |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x)) = 0$. |
| 5p | c) Arătați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. |
| | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, unde m este un număr real. |
| 5p | a) Calculați $f(-1)$. |
| 5p | b) Determinați numărul real m știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f . |
| 5p | c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. |
| 5p | a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f . |
| | 2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$. |
| 5p | a) Calculați I_1 . |
| 5p | b) Arătați că $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$, pentru orice număr natural nenul n . |
| 5p | c) Demonstrați că $I_n = n! \left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{n!} \right)$, pentru orice număr natural nenul n . |

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = i$ $\bar{z} = -i$ $a = 0, b = -1$	2p 1p 2p
2.	$x_V = -2$ $y_V = -16$	2p 3p
3.	$x^2 - 4 = 6x - 12 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$ $x_1 = 2$ nu convine și $x_2 = 4$ verifică ecuația	2p 3p
4.	Numerele divizibile cu 100 din mulțimea numerelor naturale de trei cifre sunt 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 și 900 $\Rightarrow$ 9 cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de trei cifre este 900 $\Rightarrow$ 900 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{100}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 8\vec{j} \Rightarrow AC = 10$ Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$ este egală cu 20	2p 3p
6.	$B = \frac{\pi}{6}$ $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(x) + A(-x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real x	2p 3p
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 2x - 1$ $\det(A(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	3p 2p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; pentru $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avem $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ care este sistem omogen Determinantul sistemului este egal cu 0 $\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluții $\Rightarrow$ există o infinitate de matrice X	3p 2p

2.a)	$f(-1) = (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 1 =$ $= -1 + m - m + 1 = 0$	2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2 - 2m$ $m^2 - 2m = -1 \Leftrightarrow m = 1$	2p 1p 2p
c)	$f = (X+1)(X^2 + (m-1)X + 1)$ f are toate rădăcinile reale $\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \cdot (x^2 + x + 1)' =$ $= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}},$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1}{2}$ Dreapta de ecuație $y = x + \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 2p 1p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$	1p 2p 2p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (1-x)e^x \Big _0^1 + \int_0^1 e^x dx =$ $= e - 2$	3p 2p
b)	$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} (e^x)' dx = (1-x)^{n+1} e^x \Big _0^1 - \int_0^1 ((1-x)^{n+1})' e^x dx =$ $= -1 + (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^x dx = -1 + (n+1)I_n,$ pentru orice număr natural nenul n	2p 3p
c)	Demonstrație prin inducție matematică: $I_1 = 1! \left(e - 1 - \frac{1}{1!}\right) = e - 2$, deci proprietatea este adevărată pentru $n = 1$ Presupunem proprietatea adevărată pentru numărul natural nenul k . Avem $I_{k+1} = (k+1)I_k - 1 = (k+1)k! \left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{k!}\right) - 1 = (k+1)! \left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{(k+1)!}\right)$, deci proprietatea este adevărată pentru orice număr natural nenul n	1p 4p