

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Determinați numerele reale a și b , știind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z = \frac{1+i}{1-i}$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - (m^2 - 1)x + 3$. |
| 5p | 3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x} = 1+x$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(4,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$. |
| 5p | 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AB = AC = 5$ și $BC = 6$. |

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Arătați că $(A(x) - A(y))^{2023} = O_3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. |
| 5p | c) Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | 2. Se notează cu x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile polinomului $f = X^4 - 3X^2 + 2X + 1$. |
| 5p | a) Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X - 2$. |
| 5p | b) Arătați că polinomul f nu are rădăcini raționale. |
| 5p | c) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -8$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{e^x}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-2x}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

5p

c) Arătați că $(2x+1)\sqrt{e} \leq 2e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

5p

a) Calculați I_2 .

5p

b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

5p

c) Demonstrați că $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, pentru orice $n \geq 2$.

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	$z = i$ $\bar{z} = -i$ $a = 0, b = -1$	2p 1p 2p
2.	$\frac{m^2 - 1}{4} = 2 \Rightarrow m^2 - 9 = 0$ $m = -3$ nu convine, $m = 3$ convine	3p 2p
3.	$1 + 7x = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ $x(x^2 + 3x - 4) = 0$ $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -4$	1p 1p 3p
4.	$p = \frac{nr.cazuri \text{ favorabile}}{nr.cazuri \text{ posibile}}$ Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ și $\{1, 3, 5\} \Rightarrow 4$ cazuri favorabile Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3 = 10 \Rightarrow p = \frac{2}{5}$	1p 2p 2p
5.	$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ și $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1)\vec{i} + (y_M - 1)\vec{j}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 1 \end{cases}$	2p 3p
6.	$S_{ABC} = 12$ $R = \frac{abc}{4S}$ $R = \frac{25}{8}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

1. a)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & x+y & (x+y)^2 \\ 0 & 1 & 2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$	2p 3p
b)	$A(x) - A(y) = \begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(x) - A(y))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(A(x) - A(y))^3 = O_3 \Rightarrow (A(x) - A(y))^{2023} = O_3$	3p 2p
c)	Matricea A este inversabilă $(A(x))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A(-x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Deci $(A(x))^{-1} = A(-x)$, unde $x \in \mathbb{R}$	1p 3p 1p
2. a)	$f(2) = 16 - 12 + 4 + 1 = 9 \Rightarrow$ Restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este $f(2) = 9$	3p 2p
b)	Presupunem că polinomul f are rădăcini raționale, f are coeficienți întregi, rădăcinile raționale pot fi 1 sau -1. $f(1) = 1 - 3 + 2 + 1 = 1 \neq 0$ și $f(-1) = 1 - 3 - 2 + 1 = -3 \neq 0$ deci presupunerea este falsă, atunci f nu are rădăcini raționale.	2p 3p
c)	x_1 este rădăcină a lui $f \Rightarrow x_1^4 - 3x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0 \mid x_1 \neq 0 \Rightarrow x_1^3 - 3x_1 + 2 + \frac{1}{x_1} = 0$. Analog $x_2^3 - 3x_2 + 2 + \frac{1}{x_2} = 0, x_3^3 - 3x_3 + 2 + \frac{1}{x_3} = 0, x_4^3 - 3x_4 + 2 + \frac{1}{x_4} = 0$. Adunăm relațiile și obținem $(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 8 = 3 \cdot 0 - 8 = -8.$	3p 2p

