

**Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_pedagogic**

**Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare**

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**( 30 de puncte)**

- |    |                                                                                                                                 |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 14$ și $a_1 = 2$ .           |
| 5p | 2. Arătați că $f(1) - f(-1) = 4$ pentru orice număr real $m$ , unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 2x + m$ .  |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{x^2+3} = 7^{4x}$ .                                                         |
| 5p | 4. Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 10%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(4,0)$ , $B(8,3)$ și $C(0,3)$ . Calculați aria triunghiului $ABC$ .       |
| 5p | 6. Se consideră rombul $ABCD$ cu $AB = 5$ și $BD = 6$ . Calculați $\sin(\angle ADB)$ .                                          |

**SUBIECTUL al II-lea**

**( 30 de puncte)**

- |                                                                                    |                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 5$ . |                                                                                                             |
| 5p                                                                                 | 1. Arătați că $(-1) * 1 = 5$ .                                                                              |
| 5p                                                                                 | 2. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.                                                  |
| 5p                                                                                 | 3. Arătați că $e = -5$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.                                |
| 5p                                                                                 | 4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 * x = 7$ .                                            |
| 5p                                                                                 | 5. Demonstrați că $(x^2 - y - 5) * (x - y^2) = (x - y)(x + y + 1)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ . |
| 5p                                                                                 | 6. Determinați numerele naturale $m$ și $n$ pentru care $m * n = 6$ .                                       |

**SUBIECTUL al III-lea**

**( 30 de puncte)**

- |                                                                                                                                     |                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . |                                                                                                                                          |
| 5p                                                                                                                                  | 1. Arătați că $\det A = -2$ .                                                                                                            |
| 5p                                                                                                                                  | 2. Demonstrați că inversa matricei $A$ este matricea $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .                        |
| 5p                                                                                                                                  | 3. Arătați că $A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .                                                          |
| 5p                                                                                                                                  | 4. Determinați numerele reale $x$ pentru care $\det(A - xI_2) = 2$ .                                                                     |
| 5p                                                                                                                                  | 5. Determinați numărul real $a$ , știind că $A \cdot A \cdot A = aA + 6I_2$ .                                                            |
| 5p                                                                                                                                  | 6. Determinați numerele reale $p$ și $q$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$ , unde $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ . |

**Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023  
Proba E. c)**

**Matematică *M\_pedagogic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

***Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare***

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total obținut pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                        |              |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1. | $a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) = 14 \Leftrightarrow 4a_1 + 6r = 14$<br>$r = 1$                                                                                             | 3p<br>2p     |
| 2. | $f(1) = 2 + m$<br>$f(-1) = -2 + m \Rightarrow f(1) - f(-1) = 2 + m - (-2 + m) = 4$ , pentru orice număr real $m$                                                                       | 2p<br>3p     |
| 3. | $x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$<br>$x = 1$ sau $x = 3$ .                                                                                                               | 3p<br>2p     |
| 4. | După prima ieftinire cu 10%, prețul obiectului este $1000 - 10\% \cdot 1000 = 900$ de lei<br>După a doua ieftinire cu 10%, prețul obiectului este $900 - 10\% \cdot 900 = 810$ de lei  | 3p<br>2p     |
| 5. | $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}  \Delta $ , unde $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 24$<br>$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ | 3p<br><br>2p |
| 6. | $m(\sphericalangle AOD) = 90^\circ$ , unde $\{O\} = AC \cap BD$ și $DO = 3 \Rightarrow AO = 4$<br>$\sin(\sphericalangle ADB) = \frac{AO}{AD} = \frac{4}{5}$                            | 3p<br>2p     |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                              |          |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | $(-1) * 1 = (-1) + 1 + 5 =$<br>$= 0 + 5 = 5$                                                                                                                                                                                                                 | 3p<br>2p |
| 2. | $(x * y) * z = (x + y + 5) * z = (x + y + 5) + z + 5 = x + y + z + 10$<br>$x * (y * z) = x * (y + z + 5) = x + (y + z + 5) + 5 = x + y + z + 10 = (x * y) * z$<br>pentru orice numere reale $x, y$ și $z$ , deci legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă | 2p<br>3p |
| 3. | $x * (-5) = x + (-5) + 5 = x$<br>$(-5) * x = (-5) + x + 5 = x = x * (-5)$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = -5$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.                                                                                | 2p<br>3p |
| 4. | $x^2 + x + 5 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ ,<br>$x = -2$ sau $x = 1$                                                                                                                                                                                  | 3p<br>2p |

|    |                                                                                                          |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5. | $(x^2 - y - 5) * (x - y^2) = x^2 - y - 5 + x - y^2 + 5 =$                                                | 2p |
|    | $= x^2 - y^2 + x - y = (x - y)(x + y) + (x - y) = (x - y)(x + y + 1)$ , pentru orice numere reale $x, y$ | 3p |
| 6. | $m * n = 6 \Leftrightarrow m + n + 5 = 6 \Leftrightarrow m + n = 1$                                      | 2p |
|    | Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $m = 0, n = 1$ sau $m = 1, n = 0$                           | 3p |

**SUBIECTUL al III-lea**
**(30 puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. | $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 =$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 3p |
|    | $= 2 - 4 = -2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2p |
| 2. | $A \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$                                                                                                        | 2p |
|    | $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-\frac{1}{2}) \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-\frac{1}{2}) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ , deci matricea $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ este inversa matricei $A$ . | 3p |
| 3. | $A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3p |
|    | $A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                 | 2p |
| 4. | $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x - 2$                                                                                                                                                                                                                                    | 3p |
|    | $x^2 - 3x - 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 4$                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2p |
| 5. | $A \cdot A = 3A + 2I_2 \Rightarrow (A \cdot A) \cdot A = (3A + 2I_2) \cdot A = 3A \cdot A + 2A = 3(3A + 2I_2) + 2A = 11A + 6I_2$                                                                                                                                                                                                                                                              | 3p |
|    | Cum matricea $A$ este nenulă, $11A + 6I_2 = aA + 6I_2 \Leftrightarrow a = 11$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2p |
| 6. | $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2+2p & 1+2q \\ 4+2p & 2+2q \end{pmatrix}, X \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ p+2q & 2p+2q \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                       | 2p |
|    | Cum $\begin{pmatrix} 2+2p & 1+2q \\ 4+2p & 2+2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ p+2q & 2p+2q \end{pmatrix}$ , obținem $p = 1$ și $q = \frac{5}{2}$ .                                                                                                                                                                                                                                 | 3p |