

ELEMENTE DE CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

i) Considerații teoretice

Un experiment al cărui rezultat depinde de factori întâmplători se numește *experiment aleator* sau *experiență aleatoare*.

Rezultatul unei experiențe aleatoare se numește *probă*. Fiecărei experiențe i se pune în corespondență *mulțimea probelor sale*.

Orice situație legată de un experiment aleator despre care se poate spune cu certitudine, dacă s-a realizat sau nu, după efectuarea experienței, se numește *eveniment* sau *eveniment elementar*.

Vom nota cu E – mulțimea cazurilor posibile.

Evenimentele se vor nota, de regulă, cu litere mari: $A, B, C, \dots$,

Fiecărei probe a unei experiențe îi corespunde realizarea sau nerealizarea unui eveniment. Astfel, fiecărui eveniment îi corespunde o mulțime de cazuri favorabile.

Spunem că un **eveniment** s-a realizat dacă rezultatul experimentului este un element în mulțimea cazurilor sale definite.

Evenimentul care nu se realizează în nici o probă a experienței se numește **eveniment imposibil**.

Evenimentul care se realizează cu certitudine în orice probă se numește **eveniment sigur**.

Evenimentul care are un singur caz favorabil se numește **eveniment elementar**.

Evenimentul cu mai multe cazuri favorabile se numește **eveniment compus**.

Vom nota cu $P(E)$ - mulțimea tuturor evenimentelor legate de un experiment

Notând $(E, P(E))$ un câmp de evenimente și $A, B \in P(E)$ atunci se definesc următoarele **operații cu evenimente**:

REUNIUNEA evenimentelor A și B, notat $A \cup B$, constă în realizarea a cel puțin unuia dintre evenimentele A, B.

$$A \cup \emptyset = A, A \cup E = E, \forall A \in P(E)$$

INTERSECȚIA evenimentelor A și B, notat $A \cap B$, constă în realizarea simultană a celor două evenimente A și B.

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap E = A, \forall A \in P(E)$$

NEGAȚIA evenimentului A, notat $\bar{A}$, constă în nerealizarea evenimentului A.

$$\bar{A} = E \setminus A, \forall A \in P(E)$$

IMPLICAȚIA Spunem că A implică B dacă realizarea evenimentului A implică realizarea evenimentului B.

Evenimentele A și B se numesc **echivalente**, notat $A=B$, dacă ele se implică reciproc.

Se numește **probabilitatea evenimentului aleator A**, notată $P(A)$, raportul dintre numărul cazurilor favorabile producerii evenimentului A și numărul tuturor cazurilor posibile ale experienței.

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

Se numește **probabilitate** o funcție $P : P(E) \rightarrow \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

1. $P(A) \in [0;1], \forall A \in P(E)$;
2. $P(E) = 1$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \emptyset$.

$(E, P(E), P)$ - câmp de probabilitate.

Proprietăți ale funcției probabilitate:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A), \forall A \in P(E)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;

3. Dacă $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \forall A, B \in P(E)$;
4. Dacă $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(A) - P(B), \forall A, B \in P(E)$;
5. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B), \forall A, B \in P(E)$;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in P(E)$.

Se numește **probabilitatea evenimentului A condiționată de evenimentul B** numărul:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{unde } A \text{ și } B \text{ sunt două evenimente pentru care } P(B) \neq 0.$$

Evenimentele A și B se numesc **evenimente independente** dacă realizarea sau nerealizarea unuia nu influențează cu nimic realizarea sau nerealizarea celuilalt.

$$A, B - \text{independente} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ii) Exerciții rezolvate

1. Într-o clasă sunt 40 de elevi, dintre aceștia 26 sunt pasionați de informatică, 18 sunt pasionați de engleză și 10 sunt pasionați și de informatică și de engleză. Dacă se alege la întâmplare un elev din clasă, să se determine probabilitatea ca elevul ales să fie:
 - i) pasionat de informatică, dar nu și de engleză;
 - ii) pasionat de informatică sau de engleză;
 - iii) pasionat de nici informatică, nici engleză.

Rezolvare:

Notăm evenimentele astfel:

A: elev pasionat de informatică;

B: elev pasionat de engleză;

$$|P| = 40 - \text{numărul total de elevi}; |A| = 26; |B| = 18; |A \cap B| = 10$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|P|} = \frac{26}{40} = \frac{13}{20}; P(B) = \frac{|B|}{|P|} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}; P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|P|} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

- i) $A \cap \bar{B}$ - pasionat de informatică, dar nu și de engleză (numărul elevilor care sunt în A, dar nu și în B)

$$|A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B| = 26 - 10 = 16 \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{|A \cap \bar{B}|}{|P|} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

ii) $A \cup B$ - pasionat de informatică sau de engleză

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{20} + \frac{9}{20} - \frac{1}{4} = \frac{17}{20}$$

iii) $\overline{A \cup B}$ - nici informatică, nici engleză

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$$

2. Se aruncă două zaruri. Să se calculeze probabilitatea de a obține:

i) un 1 și un 4 (în orice ordine);

ii) doi de 6;

iii) același număr pe ambele zaruri

iv) un total de 7 puncte

v) un total de puncte mai mare sau egal cu 11

Rezolvare:

$$P = \{(i, j) / i, j = \overline{1, 6}\}, |P| = 36$$

i) Evenimentul A: un 1 și un 4

$$A = \{(1, 4), (4, 1)\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|P|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

ii) Evenimentul B: doi de 6

$$B = \{(6, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|P|} = \frac{1}{36}$$

iii) Evenimentul C: același număr

$$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{|P|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

iv) Evenimentul D: total 7 puncte

$$i + j = 7 \Rightarrow D = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow P(D) = \frac{|D|}{|P|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

v) Evenimentul E: total ≥ 11

$$E = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(E) = \frac{|E|}{|P|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

3. Într-o urnă se află 4 bile roșii, 5 bile albe și 9 bile negre. Se extrag simultan 4 bile.

- i) Care este probabilitatea ca:
- a) toate bilele să fie roșii;
 - b) toate bilele să fie albe;
 - c) toate bilele să fie negre;
- ii) Care este probabilitatea ca:
- a) nicio bilă să nu fie roșie;
 - b) nicio bilă să nu fie albă;
 - c) nicio bilă să nu fie neagră;
- iii) Care este probabilitatea ca o bilă să fie roșie și una alba;
- iv) Care este probabilitatea ca:
- a) cel puțin două bile extrase să fie roșii;
 - b) cel puțin trei bile extrase să fie albe.

Rezolvare:

Numărul total de bile: $4+5+9=18$

Numărul total de cazuri posibile: $C_{18}^4 = \frac{18!}{4!14!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3060$

i) a) toate bilele să fie roșii $P = \frac{C_4^4}{C_{18}^4} = \frac{1}{3060}$;

b) toate bilele să fie albe $P = \frac{C_5^4}{C_{18}^4} = \frac{5}{3060} = \frac{1}{612}$

c) toate bilele să fie negre $P = \frac{C_9^4}{C_{18}^4} = \frac{126}{3060} = \frac{7}{170}$

ii) a) nicio bilă să nu fie roșie

Alegem 4 bile doar din albe și negre $5+9=14$; $P = \frac{C_{14}^4}{C_{18}^4} = \frac{1001}{3060}$

b) nicio bilă să nu fie albă

Alegem 4 bile doar din roșii și negre $4+9=13$; $P = \frac{C_{13}^4}{C_{18}^4} = \frac{715}{3060} = \frac{143}{612}$

c) nicio bilă să nu fie neagră

Alegem 4 bile doar din roșii și albe $4+5=9$; $P = \frac{C_9^4}{C_{18}^4} = \frac{126}{3060} = \frac{7}{170}$

iii) Dacă o bilă trebuie să fie roșie și una alba, atunci celelalte 2 bile trebuie să fie negre

$$P = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_9^2}{C_{18}^4} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 36}{3060} = \frac{4}{17}$$

iv) a) cel puțin 2 roșii: avem următoarele posibilități

$$- 2 \text{ roșii: } C_4^2 \cdot C_{14}^2$$

$$- 3 \text{ roșii: } C_4^3 \cdot C_{14}^1$$

$$- 4 \text{ roșii: } C_4^4 \cdot C_{14}^0$$

$$P = \frac{C_4^2 \cdot C_{14}^2 + C_4^3 \cdot C_{14}^1 + C_4^4 \cdot C_{14}^0}{C_{18}^4} = \frac{6 \cdot 91 + 4 \cdot 14 + 1}{3060} = \frac{603}{3060} = \frac{67}{340}$$

b) cel puțin 3 albe: avem următoarele posibilități

$$- 3 \text{ albe: } C_5^3 \cdot C_{13}^1$$

$$- 4 \text{ albe: } C_5^4 \cdot C_{13}^0$$

$$P = \frac{C_5^3 \cdot C_{13}^1 + C_5^4 \cdot C_{13}^0}{C_{18}^4} = \frac{10 \cdot 13 + 5}{3060} = \frac{135}{3060} = \frac{3}{68}$$

4. Se aruncă succesiv două zaruri. Notând cu A evenimentul ca pe primul zar să se obțină cel mult 4 puncte iar cu B evenimentul ca suma cifrelor obținute pe cele două zaruri să fie 9, să se calculeze $P(A)$, $P(B)$, $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P(A \cap B)$.

Rezolvare:

Mulțimea probelor pentru un zar este $P_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\text{card}P_1 = 6$.

Mulțimea probelor pentru 2 zaruri este:

$$P = P_1 \times P_1 = \{(i, j) / i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \text{card}P = 36$$

A: „pe primul zar să se obțină cel mult 4 puncte”, $A = \{1, 2, 3, 4\} \subset P_1$, $\text{card}A = 4$

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}P_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

B: „suma cifrelor obținute pe cele două zaruri să fie 9”,

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} \subset P, \text{card}B = 4$$

$$P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}P} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$A \cap B$: „suma pe cele două zaruri să fie 9 și primul zar ≤ 4 ”,

$$A \cap B = \{(3, 6), (4, 5)\}, \text{card}(A \cap B) = 2$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}P} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\text{Probabilitatea condiționată } P_A B = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Probabilitatea condiționată } P_B A = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{18} \cdot 9 = \frac{1}{2}$$

5. Se consideră urmele $U_1(2a, 3n), U_2(4a, 2n), U_3(a, 5n)$. Din fiecare urnă se extrage câte o

bilă. Determinați probabilitatea ca:

- i) toate cele 3 bile să fie albe;
- ii) exact o bilă să fie alba și două negre;
- iii) exact două bile să fie albe și una neagră.

Rezolvare:

Metoda 1

$$A_1: \text{„din } U_1 \text{ iese bilă albă”}, P(A_1) = \frac{2}{5}, P(\overline{A_1}) = \frac{3}{5}$$

$$A_2: \text{„din } U_2 \text{ iese bilă albă”}, P(A_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(\overline{A_2}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A_3: \text{„din } U_3 \text{ iese bilă albă”}, P(A_3) = \frac{1}{6}, P(\overline{A_3}) = \frac{5}{6}$$

$$\text{i) } P(3 \text{ albe}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{45};$$

$$\text{ii) } P(\text{exact o bila alba}) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$$

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{9}$$

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$P(\text{exact o bila alba}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{43}{90}.$$

iii) neagră din $U_3: A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$

neagră din $U_2: A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3$

neagră din $U_1: \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{9}$$

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{45}$$

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

$$P(\text{exact o bila neagra}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{45} + \frac{1}{15} = \frac{14}{45}.$$

6. Se aruncă o monedă de 8 ori.

i) Care este probabilitatea de a obține de trei ori stema?

ii) Care este probabilitatea de a obține de 5 ori stema?

Rezolvare:

La fiecare aruncare putem avea stema (s) sau banul (b), $P(\{s\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{2}$

Suntem în schema lui Bernoulli, cu:

- $n=8$ aruncări;

- probabilitatea de succes $p = \frac{1}{2}$;

- probabilitatea de insucces $q = \frac{1}{2}$

Probabilitatea de a obține k steme din n aruncări este $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$\left. \begin{array}{l} n = 8 \\ \text{i) } k = 3 \\ p = q = \frac{1}{2} \end{array} \right| \Rightarrow P_8(3) = C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 56 \cdot \frac{1}{256} = \frac{7}{32}$$

ii) Cel puțin de 5 ori stema înseamnă 5 sau 6 sau 7 sau 8

$$P_8(\geq 5) = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8)$$

$$P_8(5) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{56}{256}$$

$$P_8(6) = C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{28}{256}$$

$$P_8(7) = C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8}{256}$$

$$P_8(8) = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

$$P_8(\geq 5) = \frac{56}{256} + \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} = \frac{93}{256}.$$

7. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 33\}$. Determinați probabilitatea ca un element al mulțimii A să fie număr prim.

Rezolvare:

$$P = \frac{n.c.f.}{n.c.p.}, \text{ unde } n.c.f. = \text{număr cazuri favorabile și } n.c.p. = \text{număr cazuri posibile}$$

$$\begin{array}{l} n.c.p. : (33-1)+1 = 33 \\ n.c.f. : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \text{adică } 11 \end{array} \left| \Rightarrow P = \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \right.$$

8. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați probabilitatea ca un element n al mulțimii A să verifice inegalitatea $2n+5 \leq 10$.

Rezolvare:

$$P = \frac{n.c.f.}{n.c.p.}, \text{ unde } n.c.f. = \text{număr cazuri favorabile și } n.c.p. = \text{număr cazuri posibile}$$

Pentru a determina cazurile favorabile, rezolvăm inecuația $2n+5 \leq 10$

$$2n+5 \leq 10 \Rightarrow 2n \leq 5 \Rightarrow n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow n \in \{1, 2\}$$

$$\begin{array}{l} n.c.p. : (6-1)+1 = 6 \\ n.c.f. : 2 \end{array} \left| \Rightarrow P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \right.$$

9. Se alege la întâmplare un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca n să fie multiplu de 5.

Rezolvare:

Numerele de două cifre sunt de la 10 la 99, adică avem $(99-10)+1=90$ numere.

Multiplii de 5 de două cifre sunt: $5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot 4, \dots, 5 \cdot 18, 5 \cdot 19$, adică $(19-2)+1=18$

$$P = \frac{\text{n.c.f.}}{\text{n.c.p.}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

10. Se alege la întâmplare un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre.

Calculați probabilitatea ca suma cifrelor să fie 10.

Rezolvare:

$\overline{ab}, a \in \{1, 2, \dots, 9\}, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, n.c.p.: $(99-10)+1=90$ numere

$a + b = 10 \Rightarrow (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$ perechi posibile,

adică 9 numere

$$P = \frac{\text{n.c.f.}}{\text{n.c.p.}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

11. Se alege la întâmplare un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Calculați

probabilitatea ca produsul $n(n+1)$ să fie multiplu de 4.

Rezolvare:

Un număr este multiplu de 4 dacă se scrie sub forma $4k$.

De asemenea, constatăm că numerele n și $n+1$ sunt consecutive

$1 \cdot 2 = 2, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 5 = 10, 2 \cdot 7 = 14, 2 \cdot 9 = 18$ aceste numere nu sunt multipli de 4,

observând că acest lucru se întâmplă când numărul par este 2, 6, 10, 14, 18

$3 \cdot 4 = 12, 4 \cdot 5 = 20, 7 \cdot 8 = 56, 8 \cdot 9 = 72, 12 \cdot 13 = 156$ aceste numere sunt multipli de 4,

observând că acest lucru se întâmplă când numărul par este 4, 8, 12, 16 și 20.

Numerele care dau produs multiplu de 4 sunt: $n \in \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20\}$

$$P = \frac{\text{n.c.f.}}{\text{n.c.p.}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

iii) Exerciții propuse

1. Se aruncă simultan 3 monede (M_1, M_2, M_3).

- i) Câte rezultate elementare are experiența?
- ii) Câte evenimente are câmpul de evenimente?
- iii) Scrieți evenimentul A: „apar exact 2 fețe (F)”.

Indicații:

- i) $|P| = 8$;
- ii) $|P(P)| = 2^8 = 256$;
- iii) $A = \{(F, F, S), (F, S, F), (S, F, F)\}$

2. Un elev rezolvă 3 exerciții (E_1, E_2, E_3). Pentru fiecare exercițiu, rezultatul poate fi corect (C) sau greșit (G).

- i) Câte rezultate elementare are experiența?
- ii) Câte evenimente are câmpul de evenimente asociat experienței?
- iii) Scrieți evenimentul AAA: „sunt rezolvate exact 2 exerciții corecte”.

3. Dintr-un pachet cu 4 cărți distincte: $\{A, K, Q, J\}$ se extrag două cărți succesiv fără revenire, iar ordinea contează.

- i) Scrieți câmpul de evenimente elementare P;
- ii) Câte evenimente sunt în $P(P)$?

Indicații:

- i) 12; ii) 4096

4. Dintr-o listă de 4 elevi diferiți $\{A, B, C, D\}$ se aleg doi elevi succesiv, fără revenire, iar ordinea contează.

- i) Scrieți câmpul de evenimente elementare P;
- ii) Câte evenimente sunt în $P(P)$?

5. O cutie are 5 bile: 2 roșii (R) și 3 albastre (A). Se extrag două bile consecutiv fără revenire.

Să se scrie mulțimea tuturor evenimentelor elementare (rezultate posibile ca perechi de culori ordonate) și apoi evenimentul B: „cel mult o bilă roșie”.

Indicații:

$$P = \{(R, R), (R, A), (A, R), (A, A)\}, \quad P = \{(R, A), (A, R), (A, A)\}.$$

6. O clasă are 2 elevi navetiști (N) și 3 elevi care locuiesc în localitate (L). Se aleg doi elevi consecutiv, fără revenire.

- i) Scrieți mulțimea tuturor evenimentelor elementare (rezultate posibile ca perechi ordonate);
- ii) Scrieți evenimentul B: „cel mult un elev navetist”.

7. Se alege la întâmplare un număr din $E = \{1, 4, 6, 9, 12\}$.

- i) Scrieți evenimentele elementare.
- ii) Scrieți două evenimente contrare (complementare).
- iii) Dați exemplu de două evenimente incompatibile și două compatibile.
- iv) Dați exemplu de două evenimente A, B astfel încât $A \subset B$.

Indicații:

i) $P = E$, elementare fiind: $\{1\}, \{4\}, \{6\}, \{9\}, \{12\}$;

ii) Două evenimente sunt contrare dacă nu pot avea loc simultan, adică $C = \{4, 6, 12\} \Rightarrow E - C = \{1, 9\}$;

iii) incompatibile: $\{4\}$ și $\{6\}$ deoarece intersecția este vidă;

compatibile: $\{4, 6\}$ și $\{6, 9\}$ deoarece $\{4, 6\} \cap \{6, 9\} = \{6\}$;

iv) $\{6\} \subset \{6, 8\}$.

8. Se alege la întâmplare un număr din mulțimea: $E = \{1, 3, 5, 8, 10, 14, 17\}$.

- i) Scrieți evenimentele elementare asociate experienței;
- ii) Scrieți două evenimente contrare (complementare);
- iii) Dați un exemplu de două evenimente incompatibile și două compatibile;
- iv) Dați două evenimente A, B astfel încât $A \subset B$.

9. Un elev susține un test cu 3 întrebări. Pentru fiecare întrebare, răspunsul poate fi corect (C) sau greșit (G). Pentru $i \in \{1, 2, 3\}$, notăm cu A_i evenimentul „la întrebarea i răspunsul

este corect”. Să se exprime, folosind evenimentele A_1, A_2, A_3 , următoarele evenimente:

- i) „Toate răspunsurile sunt corecte.”;
- ii) „Exact două răspunsuri sunt corecte.”;
- iii) „Cel mult un răspuns este greșit.”;
- iv) „Niciun răspuns nu este corect.”.

Indicații:

- i) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;
- ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$;
- iii) cel mult un răspuns greșit este echivalent cu cel puțin două răspunsuri corecte
 $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$;
- iv) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$.

10. Se consideră mulțimea $M = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18\}$ din care se alege la întâmplare un element. Fie evenimentele:

- A: „numărul este par”;
- B: „numărul este multiplu de 3”;
- C: „numărul este pătrat perfect”.

Determinați evenimentele:

- i) $A \cap B$;
- ii) $A \cup C$;
- iii) $B \cap \overline{C}$;
- iv) $\overline{A} \cap B$.

Indicații:

- i) $\{6, 12, 18\}$; ii) $\{2, 4, 6, 8, 9, 12, 18\}$; iii) $\{3, 6, 12, 18\}$; iv) $\{3, 9\}$.

11. Un elev încearcă să se autentifice pe o platformă online folosind trei date de acces: parolă (P), cod de securitate (C) și confirmare e-mail (E). Pentru fiecare etapă, autentificarea poate fi reușită (R) sau nereușită (N).

Fie evenimentele:

- A: „parola este corectă”;
- B: „codul de securitate este corect”;

C: „confirmarea e-mail este validă”.

Să se exprime cu ajutorul evenimentelor A, B și C următoarele situații:

i) „Autentificarea este complet reușită.”

ii) „Cel puțin o etapă este nereușită.”

iii) „Exact o singură etapă este nereușită.”

iv) „Autentificarea eșuează complet.”

Indicații:

i) $A \cap B \cap C$;

ii) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$;

iii) $(\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C})$;

iv) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

12. Doi elevi aruncă la coș câte o singură dată. Probabilitatea ca primul să înscrie este $\frac{1}{3}$, iar

probabilitatea ca al doilea să înscrie este $\frac{2}{5}$. Care este probabilitatea ca măcar unul dintre ei să înscrie?

Indicații:

$$\frac{3}{5}.$$

13. Două imprimante funcționează independent. Probabilitatea ca prima să imprime corect o

pagină este $\frac{3}{4}$, iar probabilitatea ca a doua să imprime corect este $\frac{5}{6}$. Care este

probabilitatea ca cel puțin una să imprime corect?

Indicații:

$$\frac{23}{24}.$$

14. Într-o cutie sunt 52 de cartonașe, 4 culori (roșu, albastru, verde, galben), câte 13 cartonașe din fiecare culoare. Pe fiecare culoare sunt numerele 1, 2, 3, ..., 15. Se extrage un cartonaș la întâmplare. Determinați probabilitatea să se extragă:

i) un cartonaș verde sau cartonașul albastru cu numărul 11;

ii) un cartonaș verde sau un cartonaș cu numărul 1 (indiferent de culoare).

Indicații:

i) $\frac{7}{26}$; ii) $\frac{4}{13}$.

15. Într-o cutie sunt 40 de bile: 10 roșii, 12 albastre, 8 verzi, 10 galbene. Se extrage o bilă. Care este probabilitatea să fie verde sau roșie?

Indicații:

$$\frac{9}{20}.$$

16. Un elev răspunde la o întrebare cu două variante (A/B), alegând la întâmplare.

Probabilitatea să nimerească răspunsul corect la o încercare este $\frac{1}{2}$. Care este probabilitatea ca, în cel mult 3 încercări, să nimerească cel puțin o dată răspunsul corect?

Indicații:

$$\frac{7}{8}.$$

17. Un elev are o șansă de $\frac{2}{5}$ să rezolve corect un exercițiu la o încercare (încercările sunt independente). Care este probabilitatea ca, în cel mult 3 încercări, să rezolve corect cel puțin o dată?

Indicații:

$$\frac{98}{125}.$$

18. Într-o clasă sunt 30 de elevi, 18 fac sport, 12 cântă într-un cor, 7 fac și sport și cântă în cor. Se alege un elev la întâmplare. Care este probabilitatea ca elevul ales să facă sport sau cor?

Indicații:

$$\frac{23}{30}.$$

19. Într-o urnă sunt 4 bile albe și 6 bile negre. Se extrag două bile, una după alta, fără revenire. Determinați probabilitățile:

- i) ambele bile albe;
- ii) ambele bile negre;
- iii) prima bilă albă și a doua neagră;
- iv) prima bilă neagră și a doua albă;
- v) bilele să fie de același fel;
- vi) bilele să fie de feluri diferite.

Indicații:

i) $\frac{2}{15}$; ii) $\frac{1}{3}$; iii) $\frac{4}{15}$; iv) $\frac{7}{15}$; v) $\frac{8}{15}$.

20. Într-un sertar sunt 7 pixuri albastre și 3 pixuri negre. Se extrag două pixuri, unul după altul, fără a le pune înapoi. Determinați probabilitatea:

- i) ambele albastre;
- ii) ambele negre;
- iii) primul albastru, al doilea negru;
- iv) pixuri de același fel;
- v) pixuri de feluri diferite.

Indicații:

i) $\frac{7}{15}$; ii) $\frac{1}{15}$; iii) $\frac{7}{30}$; iv) $\frac{8}{15}$; v) $\frac{7}{15}$.

21. Într-o urnă sunt 5 bile albe și 3 bile negre, toate de aceeași mărime. Se extrag două bile, una după alta, fără revenire.

- i) Determinați probabilitatea ca ambele bile să fie albe.
- ii) Determinați probabilitatea ca bilele să fie de culori diferite.

Indicații:

i) $\frac{5}{14}$; ii) $\frac{15}{28}$.

22. Se consideră mulțimea numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n , numărul $n+5$ să fie multiplu de 10.

Indicații:

$\frac{1}{10}$.

23. Se consideră mulțimea A a numerelor naturale de două cifre. Se alege la întâmplare un număr $n \in A$. Calculați probabilitatea ca numărul $n+3$ să fie multiplu de 5.

Indicații:

$$\frac{1}{5}.$$

24. Se consideră mulțimea numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca ultima cifră a unui număr n , ales la întâmplare din mulțime, să fie multiplu de 3.

Indicații:

$$\frac{2}{5}.$$

25. Se consideră mulțimea numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca suma cifrelor unui număr n , ales la întâmplare din mulțime, să fie număr par.

Indicații:

$$\frac{5}{9}.$$

26. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 6.

Indicații:

$$\frac{4}{9}.$$

27. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, cifra unităților să fie multiplu de 3.

Indicații:

$$\frac{1}{3}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Coșniță, C., Turtoiu, F. – „Culegere de probleme de algebră”, Editura Tehnică, București, 1975.
2. Coța, A. ș.a. – „Geometrie și trigonometrie” – manual – Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
3. Ionescu – Țiu, C. – „Exerciții și probleme de matematică”, vol.I, Editura Pan General, București, 1994.
4. Burtea, M., Georgeta, B. – „Matematică, clasa a X-a”, Editura Campion, București, 2022.
5. Nicolescu, Cătălin-Petru – „Lecții de matematică”, Editura Icar, București, 1990.
6. – „Manuale alternative”, 2000-2006.
7. Ganga, M. – „Matematică, manual pentru clasa a X-a”, Editura Mathpress, 2002;
8. Petrică, I., Lazăr, I. – „Probleme de algebră pentru liceu”, vol. I-II, Editura Petrion, București, 1992.
9. Sacter, O. – „Culegere de probleme de matematică”, Editura Tehnică, București, 1965.
10. Stamate, I., Stoian, I. – „Culegere de exerciții și probleme de algebră” – Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
11. Stoka, M., ș.a. – „Culegere de probleme de trigonometrie”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
12. Turtoiu, F. – „Probleme de trigonometrie”, Editura Tehnică, București, 1986.
13. Udriște, C., Bucur, C. – „Probleme de matematică și observații metodologice”, Editura Facla, Timișoara, 1980.
14. Lupu, C., Lupu, V., Ciofu C. – „Exerciții și probleme de algebră pentru liceu”, Editura Grafitec, Bacău, 2006.