

Concursul MateInfoUB 2021

1. Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ unde $x_n = \left(\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}}{3} \right)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ este:

☐ A $\sqrt[3]{30}$ ☐ B $\ln \sqrt[3]{30}$ ☐ C e ☐ D 1 ☐ E ∞

2. Considerăm în numere complexe ecuația $|z|^2 + z = 3 + 4i$. Numărul de soluții ale ecuației este egal cu:

☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E 4

3. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 - 2x + 3$, respectiv $g(x) = -x^2 + 4x + a$. Valoarea lui a astfel încât mulțimea

$$\{f(x) | x \in \mathbb{R}\} \cap \{g(x) | x \in \mathbb{R}\}$$

are exact un element este:

☐ A $-\frac{3}{2}$ ☐ B -2 ☐ C 2 ☐ D $\frac{3}{2}$ ☐ E -6

4. Fie pătratul $A_1A_2A_3A_4$ în care notăm M_1 (respectiv M_2, M_3, M_4) mijlocul lui $[A_1A_2]$ (respectiv al lui $[A_2A_3], [A_3A_4], [A_4A_1]$). Fie $\{T_1\} = A_1M_2 \cap A_4M_1$, $\{T_2\} = A_1M_2 \cap A_2M_3$, $\{T_3\} = A_2M_3 \cap A_3M_4$, $\{T_4\} = A_3M_4 \cap A_4M_1$. Atunci raportul dintre ariile patruleterelor $T_1T_2T_3T_4$ și $A_1A_2A_3A_4$ este egal cu:

☐ A $\frac{1}{4}$ ☐ B $\frac{1}{5}$ ☐ C $\frac{1}{6}$ ☐ D $\frac{1}{8}$ ☐ E $\frac{2}{5}$

5. Fie $(G, \star)$ un grup finit cu elementul neutru e și fie a un element al lui G . Ordinul lui a este cel mai mic număr natural n pentru care $\underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{\text{de } n \text{ ori}} = e$. În care dintre următoarele grupuri de clase

de resturi, elementul $\hat{3}$ are ordinul 3? (Am notat cu $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.)

☐ A $(\mathbb{Z}_3, +)$ ☐ B $(\mathbb{Z}_6, +)$ ☐ C $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$ ☐ D $(U(\mathbb{Z}_{13}), \cdot)$ ☐ E $(\mathbb{Z}_8, +)$

6. Alegem la întâmplare tripletul de numere (a, b, c) cu $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$. Cu numerele alese, definim șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, descris prin $x_n = a\sqrt{n^2 + 1} + b\sqrt{n^2 + 2} - c\sqrt{n^2 + 3}$. Care este probabilitatea ca, pentru alegerea făcută, șirul să aibă limită finită?

☐ A $\frac{3}{32}$ ☐ B 0 ☐ C 1 ☐ D $\frac{1}{64}$ ☐ E 0,5

7. În pătratul $ABCD$, cu latura de 1, alegem punctele P și Q pe segmentele AB și respectiv AD , astfel ca $CP \perp PQ$. Valoarea maxim posibilă a lungimii segmentului AQ , când P și Q variază, este :

☐ A $\frac{1}{4}$ ☐ B $\frac{1}{2}$ ☐ C $\frac{3}{4}$ ☐ D 1 ☐ E $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < 2 \\ x^2 - 7x + 11, & \text{dacă } x \in [2, 6]. \\ -x + 9, & \text{dacă } x > 6 \end{cases}$$

Atunci mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$ este:

- ☐ A $[-2, 0] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup [8, 10]$ ☐ B $[-2, 0] \cup [2, 3] \cup [8, 10]$ ☐ C $[-2, 0] \cup [2, 5] \cup [8, 10]$
☐ D $[-2, 0] \cup [4, 5] \cup [8, 10]$ ☐ E $[-2, 0] \cup [8, 10]$

9. Fie $\mathcal{A}$ mulțimea graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, pentru care punctele de intersecție cu axele sunt vârfurile unui triunghi echilateral. Numărul de elemente ale mulțimii $\mathcal{A}$ este:

- ☐ A 0 ☐ B 2 ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E 6

10. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+|1+x|} + \frac{1}{1+|1-x|}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci numărul valorilor parametrului real m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact 3 soluții este:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E 4

11. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu proprietatea că $f(0) = 0$ și $f'(x)(1+x^2) \geq 1+f^2(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci despre limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ putem afirma că:

- ☐ A este 0 ☐ B este $\frac{\pi}{2}$ ☐ C este 1 ☐ D este ∞ ☐ E nu există

12. Considerăm $ABCD$ un patrulater convex. Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \{P \in \text{Int}(ABCD) \mid |\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}| \text{ este minim posibil}\}.$$

Atunci numărul de elemente ale mulțimii $\mathcal{M}$ este:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 4 ☐ E infinit

13. Fie ABC un triunghi isoscel ascuțitunghic, cu vârful în A și fie M mijlocul laturii $[BC]$. Fie $E \in [AB]$, $F \in [AC]$ cu $ME \perp AB$, $MF \perp AC$. Dacă $\mathcal{S}_{MEF} = \frac{3}{16}\mathcal{S}_{ABC}$ (am notat cu $\mathcal{S}$ aria triunghiului respectiv), atunci măsura unghiului $\widehat{BAC}$ este:

- ☐ A 30° ☐ B 45° ☐ C 60° ☐ D 72° ☐ E 15°

14. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x|x+a| + |x+b|$, unde a și b sunt două numere întregi, fixate. Pentru câte perechi (a, b) funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$?

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E o infinitate

15. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Numărul legilor de compoziție $*$ definite pe mulțimea A , pentru care $(A, *)$ este grup izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$, iar ordinul lui 3 în acest grup este 2, este :

- ☐ A 2 ☐ B 6 ☐ C 24 ☐ D 3 ☐ E 1

16. Valoarea integralei $\int_{-1}^1 \frac{x \cdot \arctg(x)}{1+e^x} dx$ este:

- ☐ A $\frac{\pi}{2} - 1$ ☐ B $\frac{\pi}{2} + 1$ ☐ C $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ☐ D $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ☐ E 1

17. Fie M o mulțime cu 2021 elemente. Valoarea minimă a numărului m astfel încât oricare 3 submulțimi ale lui M cu câte m elemente să aibă intersecția nevidă este:

- ☐ A 3 ☐ B 1346 ☐ C 1348 ☐ D 1355 ☐ E 2018

18. Numerele reale a și b sunt alese astfel ca polinomul $P(X) = X^3 - X^2 + aX - b$ să aibă trei rădăcini reale și pozitive. Valoarea maxim posibilă a lui $a - b$ este:

- ☐ A 0 ☐ B $\frac{1}{27}$ ☐ C $\frac{8}{27}$ ☐ D 1 ☐ E $\sqrt{3}$

19. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ o matrice care are toate elementele de pe prima coloană egale cu 1, restul elementelor matricei putând lua valorile $-1, 0$ sau 1 . Numărul de valori distincte pe care le poate lua $\det(A)$ este:

- ☐ A 7 ☐ B 9 ☐ C 11 ☐ D 27 ☐ E 729

20. Notăm cu $(U(A), \cdot)$ grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $(A, +, \cdot)$. Pentru câte valori ale numărului natural n , cu $n \geq 5$, asocierea $\hat{x} \mapsto \overline{4x+1}$ definește un morfism de la grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$ la grupul $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$? ($\hat{x}$ este clasa numărului x modulo 6, iar $\bar{y}$ este clasa numărului y modulo n)

- ☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C 4 ☐ D 5 ☐ E o infinitate

21. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică, de perioadă T , unde $T > 0$ și fie F o primitivă a sa. Care dintre următoarele condiții ne asigură că și F este funcție periodică?

- ☐ A $T = 2\pi$ ☐ B f este funcție pară ☐ C $\int_0^T f(x)dx = 0$
☐ D $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ ☐ E Graficul lui f are o axă de simetrie.

22. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) =$ distanța de la x la cel mai apropiat punct din intervalul $[3, 5]$. Numărul de valori întregi ale parametrului m pentru care ecuația $f(f(x)) = m$ are exact patru soluții reale este:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E 5

23. Fie M mulțimea tuturor numerelor naturale nenule n pentru care grupurile $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_2, +)$ sunt izomorfe, unde $(U(A), \cdot)$ este grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $(A, +, \cdot)$. Numărul de elemente ale mulțimii M este:

- ☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E 5

24. Cercurile de centre O_1 și O_2 trec fiecare prin centrul celuilalt și se intersectează în A și B . O secantă oarecare dusă prin A mai intersectează cercurile în M_1 și M_2 , astfel ca punctele O_1, O_2, M_1 și M_2 să fie distincte și să determine un patrulater convex. Care este maximul raportului dintre aria acestui patrulater și aria porțiunii comune delimitată de cele două discuri?

- ☐ A $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ☐ B $\frac{9\sqrt{3}}{8\pi-6\sqrt{3}}$ ☐ C $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$ ☐ D $\frac{3}{2}$ ☐ E $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$