C_i^o f(u) www.profesorciofuconstantin

Vectori liniar dependenți. Vectori liniar independenți

$\vec{v} \in V$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in V$

$\vec{v}$ - combinație liniară a vectorilor $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$

dacă $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.î.

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \dots + \alpha_n\vec{v_n}$$

Vectorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ sunt liniar dependenți peste K dacă $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, nu toți nuli, a.î.

$$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \dots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

l.d.

Vectorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ sunt liniar independenți peste K dacă $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, cu $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \dots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$ atunci $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

l.i.

Expl

Fie $\bar{v}_1 = (1,2,0)$, $\bar{v}_2 = (-1,-1,2)$, $\bar{v}_3 = (t,1,-2)$. $t = ?$ a.î. $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ să fie liniar dependenți

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ l.d $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3 = \bar{0}$

$\alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(-1,-1,2) + \alpha_3(t,1,-2) = \bar{0}$

$(\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (-\alpha_2, -\alpha_2, 2\alpha_2) + (t\alpha_3, \alpha_3, -2\alpha_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \boxed{\alpha_1 - \alpha_2} + t\alpha_3 = 0 \\ \boxed{2\alpha_1 - \alpha_2} + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & t \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 4t - 0 - (0+2+4) = 2+4t-6 = 4t-4$$

Caz 1: Dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow$ S.C.D cu sol unică

$4t - 4 \neq 0 \Rightarrow 4t \neq 4 \Rightarrow t \neq 1$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\alpha_1}{\det A}, \quad \Delta\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & t \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

La fel $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$

Concluzie: Dacă $t \neq 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ sunt l.i.

Caz 2: Dacă $\det A = 0 \Rightarrow 4t - 4 = 0 \Rightarrow 4t = 4 \Rightarrow t = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 0 \Rightarrow r < 3$$

$$d_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow r = 2$$

$$\left.\begin{matrix} s = 3 \\ r = 2 \end{matrix}\right| \Rightarrow s - r = 1 \Rightarrow 1\ \Delta C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{S.C.}$$

(are soluții)

$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=2 \end{array}\right| \Rightarrow n-r=1 \Rightarrow$ sistem nedeterminat cu ∞^1 sol β

Not $\boxed{\alpha_3=\beta}$

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2=-\beta & | \cdot(-2) \\ 2\alpha_1-\alpha_2=-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_1+2\alpha_2=2\beta \\ 2\alpha_1-\alpha_2=-\beta \end{cases} \quad (+)$$

$$\alpha_2=\beta$$

$2\alpha_1-\beta=-\beta \Rightarrow \alpha_1=0$

$S=(0,\beta,\beta) \Rightarrow \boxed{\bar v_1, \bar v_2, \bar v_3 \text{ l.d. dacă } t=1}$

Exerciții propuse

① $m=?$ a.î. vectorii $\bar v_1=(-1,-m,1)$, $\bar v_2=(2,1,1)$ și $\bar v_3=(3,1,-1)$ sunt liniar dependenți

② $a=?$ a.î. vectorii $\bar v_1=(3,1,1)$, $\bar v_2=(-1,2,-1)$ și $\bar v_3=(a-1,2,-1)$ sunt liniar independenți

---

Exp 2

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^2[X]$ se consideră polinoamele $f_1=1+x$, $f_2=1-2x$, $f_3=-1+x^2$. Verificați dacă polinoamele sunt liniar indep.

$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=0$

$\alpha_1(1+x)+\alpha_2(1-2x)+\alpha_3(-1+x^2)=0$

$\alpha_1+\alpha_1 x+\alpha_2-2\alpha_2 x-\alpha_3+\alpha_3 x^2=0$

$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+(\alpha_1-2\alpha_2)x+\alpha_3 x^2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-2\alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_1-2\alpha_2=0 \end{cases} \quad (-)$$

$$/ \quad 3\alpha_2=0$$

$$\alpha_2=0$$

$$\alpha_1+0-0=0 \Rightarrow \alpha_1=0$$

Cum $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \Rightarrow f_1, f_2, f_3$ l.i

---

Exercitii propuse

(1) $\mathbb{R}^3[X]$, $f_1=1$, $f_2=2+X$, $f_3=3-X^2$, $f_4=1+X^3$

Să se arate că polin. f_1, f_2, f_3 și f_4 sunt l.i

(2) $\mathbb{R}^4[X]$, $f_1=1-X$, $f_2=1+X^2$, $f_3=1-X^3$, $f_4=1+X^4$

f_1, f_2, f_3, f_4 l.i ?

Exp 3 | Fie $C^0(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ cont}\}$ se consideră funcțiile $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\cos^2 x$, $f_3(x)=\cos 2x$. Să se studieze dacă f_1, f_2, f_3 sunt liniar dependente în spațiul $C^0(\mathbb{R})$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$f_3=\cos 2x = 2\cos^2 x-1 = 2\cdot f_2-f_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3-2f_2+f_1=0 \quad \text{(ordonăm)}$$

$$\Rightarrow f_1-2f_2+f_3=0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=-2 \\ \alpha_3=1 \end{array} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1, f_2, f_3 \text{ l.d în } C^0(\mathbb{R})$$

Exerciții propuse

1. $C^0(\mathbb{R})$, $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\sin^2 x$, $f_3(x)=\cos 2x$ l.d?

2. $C^0(\mathbb{R})$, $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=2\cos^2\frac{x}{2}$ l.i?

3. $C^0(\mathbb{R})$, $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-x}$, $f_3(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ l.i?